SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

Risolvi uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un piano è data la circonferenza λ di centro O e raggio $OA = r$; conduci per A la retta a tangente a λ e una semiretta di origine O che intersechi la tangente nel punto B e la circonferenza in C. La retta passante per C e parallela ad a incontra in D il segmento OA e in M la parallela ad OA passante per B.

1. Dimostra che valgono le proporzioni: $\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}$, $\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DA}$.
2. Dimostra che il luogo geometrico Γ descritto da M al variare di B è simmetrico rispetto alla retta OA.
3. Scelto il riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e l'asse y passante per A orientato come la semiretta OA, verifica che l'equazione della curva Γ descritta da M al variare di B è: $f(x) = \dfrac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}$.
4. Traccia il grafico di Γ.
5. Posto $r = 2$ considera il solido Ω avente
   - per base la regione di piano delimitata dal semiasse positivo delle x, dall'asse y e da Γ;
   - come sezioni ortogonali al piano $(x; y)$ i triangoli equilateri di lato $l = f(x)$.

Verifica che il volume di Ω è: $\pi\sqrt{3}$.

PROBLEMA 2

Considera le funzioni $f(x) = x + (1 + x)e^{-2x}$ e $g(x) = (1 + x)e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Verifica che f ha un solo asintoto e determina il suo punto d'intersezione con la funzione.
2. Disegna il grafico sommario di f; dimostra che ha un'unica intersezione con l'asse delle ascisse e determina, con tre iterazioni di un metodo iterativo a piacere, un valore approssimato.
3. Calcola le aree:
   - S_1 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da f e dal suo asintoto;
   - S_2 della regione piana situata nel semipiano $x \geq -1$ e delimitata da g e dall'asse x.
4. Determina la traslazione del piano nella quale la funzione g ha per immagine la funzione $g_1(x) = \dfrac{e^2 x}{e^{2x}}$.
5. Calcola il volume del solido generato dalla figura piana finita delimitata da g_1 e dalla retta $y = x$ in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse.

QUESTIONARIO

1 Lo scopone scientifico si gioca in quattro con un mazzo da 40 carte distribuendone 10 a ciascuno. Qual è il numero delle possibili distribuzioni se i giocatori si dispongono in un ordine prefissato? Se si tiene conto anche di tutti i modi in cui si possono disporre i giocatori qual è il numero delle distribuzioni?

2 Nel decadimento radioattivo la probabilità che un radionuclide decada nel generico intervallo di tempo $[0,\ t[$ è espressa dalla relazione $p(0; t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda z}\, dz$. Nel decadimento beta del ^{32}P (fosforo 32) si osserva che, dopo 14,3 giorni, sono ancora in vita il 50% dei nuclei.

Dimostra che $\lambda = \dfrac{\ln 2}{14{,}3}$ e calcola la probabilità che un nucleo abbia una durata di vita superiore a 20 giorni.

3 Per quali valori del parametro reale k l'equazione $|\ln x - 1| + |e^x + k| = 0$ ammette soluzioni reali?

a) Per nessun valore di k.
b) Soltanto per $k = -e$.
c) Soltanto per $k = -e^2$.
d) Per $k < 0$.
e) Soltanto per $k = -e^e$.

Soltanto una delle alternative proposte è giusta.
Rispondi dando adeguata motivazione.

4 Discuti il seguente sistema parametrico.

$$\begin{cases} x - \lambda y - z = \lambda - 1 \\ 2x + (\lambda + 1)y + z = 0 \\ -\lambda x + y + \lambda z = 1 - \lambda \end{cases} \quad , \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

5 Sia data la funzione

$f: A \to \mathbb{R}$ (con A sottoinsieme proprio di $\mathbb{R}$) derivabile $\forall x \in A$.

Discuti la verità della seguente proposizione dando esauriente motivazione e riferendo almeno un esempio:
«condizione necessaria e sufficiente affinché f sia crescente (decrescente) su A è che risulti

$f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\forall x \in A$».

6 Dimostra che l'equazione

$$\ln x + \cos x + x = 0$$

ha un'unica soluzione reale. Determina un intervallo di ampiezza minore di $\dfrac{1}{2}$ che contenga la soluzione.

7 Quale fra i seguenti eventi ha probabilità maggiore?

a) In tre lanci di uno stesso dado il 5 esca soltanto una volta.
b) In un lancio di due dadi la somma delle facce sia 8.

I dadi non sono truccati e sono identici.

8 Considera le funzioni:

$$f(x) = \ln(\sqrt{x+1} + 1) + \ln(\sqrt{x+1} - 1), \qquad g(x) = \ln x.$$

Discuti la verità della seguente affermazione:

«poiché $f'(x) = g'(x) = \dfrac{1}{x}$, per uno dei corollari del teorema di Lagrange le due funzioni differiscono per una costante».
Nel caso che sia vera calcola il valore della costante.

9 È data la seguente successione definita per ricorrenza:

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = a_n + 3n - 1, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

a) Dimostra che è crescente.
b) Dimostra che $\forall n \in \mathbb{N} \ \ a_n \geq n^2$.

10 Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, determina una simmetria assiale e una traslazione del piano che diano come immagine di f la funzione $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

PROBLEMA 1

1. Osserviamo la figura.

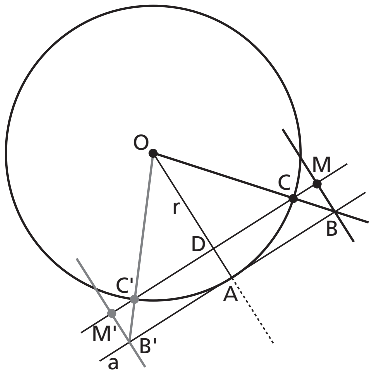


Figura 1.

Il triangolo ODC è simile a OAB per costruzione; $\overline{OC} = \overline{OA}$, $\overline{DM} = \overline{AB}$ per costruzione; pertanto:

$$\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OA} : \overline{AB} \quad \rightarrow \quad \overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}.$$

Il triangolo ODC è simile a BCM per costruzione; $\overline{OC} = \overline{OA}$, $\overline{DA} = \overline{MB}$ per costruzione; pertanto:

$$\overline{OC} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{BM} \quad \rightarrow \quad \overline{OA} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DA}.$$

2. Nella simmetria assiale di asse OA le rette AB e DM sono globalmente invarianti, quindi la semiretta uscente da O e simmetrica alla semiretta OB incontra la retta AB in B' simmetrico di B e la retta DM in C' simmetrico di C. La parallela ad OA condotta per B' è pertanto simmetrica di BM, quindi interseca la retta DM nel punto M' simmetrico di M.

3. Posto il riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e l'asse y passante per A orientato come la semiretta OA, indichiamo con $(x; y)$ le coordinate di M.

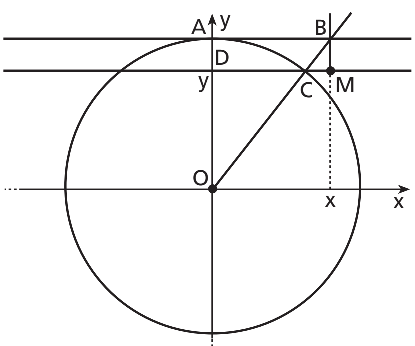


Figura 2.

Scriviamo la proporzione $\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}$ utilizzando le coordinate:

$$y : \overline{DC} = r : x \quad \rightarrow \quad \overline{DC} = \frac{xy}{r}.$$

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODC:

$$\overline{DC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 \quad \rightarrow \quad \overline{DC}^2 + y^2 = r^2.$$

Sostituiamo a $\overline{DC}$ la precedente espressione e riduciamo:

$$\frac{x^2y^2}{r^2} + y^2 = r^2 \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{r^4}{x^2+r^2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\pm r^2}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

Accettiamo soltanto il segno positivo perché, per costruzione, la curva giace nel I e nel II quadrante (gli angoli $A\hat{O}B$ sono acuti), quindi:

$$f(x) = \frac{r^2}{\sqrt{x^2+r^2}}.$$

4. Campo di esistenza: $\mathbb{R}$; segno: $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$; $f(0) = r$; $f(x)$ è: pari. La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
Asintoti:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{r^2}{\sqrt{x^2+r^2}} = 0, \qquad \text{l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.}$$

Derivata prima: $f'(x) = -\dfrac{r^2 x}{\sqrt{(x^2+r^2)^3}}$. Pertanto:

$x < 0 \rightarrow f'(x) > 0$, $\quad f(x)$ crescente;

$x > 0 \rightarrow f'(x) < 0$, $\quad f(x)$ decrescente;

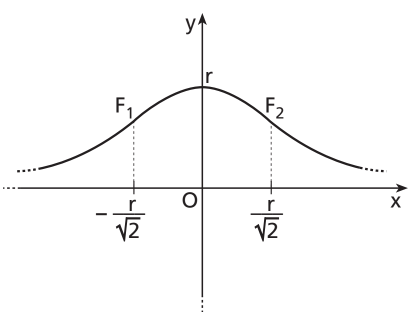
$x = 0 \rightarrow f'(x) = 0$, $\quad$ punto di massimo relativo e assoluto.

Derivata seconda: $f''(x) = \dfrac{r^2(2x^2 - r^2)}{\sqrt{(x^2+r^2)^5}}$. Pertanto:

$-\dfrac{r}{\sqrt{2}} < x < \dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) < 0$, $\quad$ concavità verso il basso;

$x < -\dfrac{r}{\sqrt{2}} \vee x > \dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) > 0$, $\quad$ concavità verso il basso;

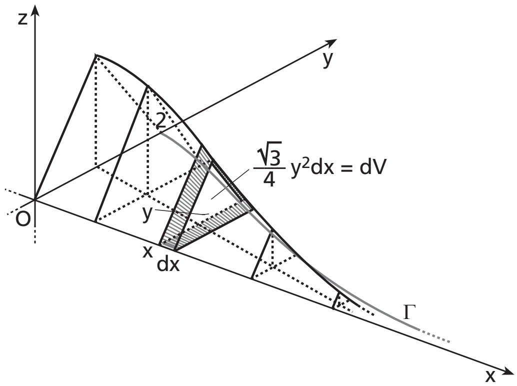
$x = \pm\dfrac{r}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad f''(x) = 0$, $\quad$ punti di flesso.



◀ **Figura 3.**

5. Posto $r = 2$ la funzione assume l'espressione: $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+4}}$.

Per rappresentare il solido Ω utilizziamo un riferimento tridimensionale.



◀ **Figura 4.**

Consideriamo una generica sezione del solido di ascissa x e scriviamo l'espressione del corrispondente elemento infinitesimo di volume:

$$dV=\left(\frac{1}{2}y\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}y^2\,dx=\frac{4\sqrt{3}}{x^2+4}\,dx.$$

Per determinare il volume di Ω calcoliamo l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\frac{4\sqrt{3}}{x^2+4}\,dx=4\sqrt{3}\lim_{m\to+\infty}\int_0^m\frac{1}{x^2+4}\,dx=4\sqrt{3}\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{4}\int_0^m\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=$$

$$=\sqrt{3}\lim_{m\to+\infty}\left[2\,\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\right]_0^m=2\sqrt{3}\lim_{m\to+\infty}\left(\mathrm{arctg}\frac{m}{2}\right)=2\sqrt{3}\frac{\pi}{2}=\pi\sqrt{3}.$$

PROBLEMA 2

1. f è continua su $\mathbb{R}$ quindi non ha asintoti verticali.

$$\lim_{x\to-\infty}(x+(1+x)\,e^{-2x})=-\infty-\infty\cdot e^{+\infty}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(1+\frac{1+x}{x}e^{-2x}\right)=1+1\cdot e^{+\infty}=+\infty.$$

Pertanto f non ha asintoto orizzontale né obliquo per $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1+x}{e^{2x}}\right)=+\infty+0=+\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\left(1+\frac{1+x}{x}\frac{1}{e^{2x}}\right)=1+0=1,\quad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{e^{2x}}\right)=0.$$

Quindi la retta $y=x$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$.
Troviamo l'intersezione fra la f e l'asintoto:

$$\begin{cases}y=x+(1+x)\,e^{-2x}\\ y=x\end{cases}\to x+(1+x)\,e^{-2x}=x,\quad (1+x)\,e^{-2x}=0\to x=-1\to A(-1;-1).$$

2. Dal comportamento per x tendente a $\pm\infty$ e dal teorema di esistenza degli zeri, deduciamo che f ha almeno un punto di intersezione con l'asse delle ascisse; per dimostrarne l'unicità studiamo la derivata prima: $f'(x) = 1 - (1 + 2x)\, e^{-2x}$.

$$f'(x) \geq 0 \leftrightarrow 1 - (1 + 2x)\, e^{-2x} \geq 0 \rightarrow 1 - \frac{1 + 2x}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow \frac{e^{2x} - 2x - 1}{e^{2x}} \geq 0 \rightarrow e^{2x} - 2x - 1 \geq 0.$$

Per risolvere questa disequazione cerchiamo di capire l'andamento della funzione $u(x) = e^{2x} - 2x - 1$.

$u'(x) = 2e^{2x} - 2$ quindi:

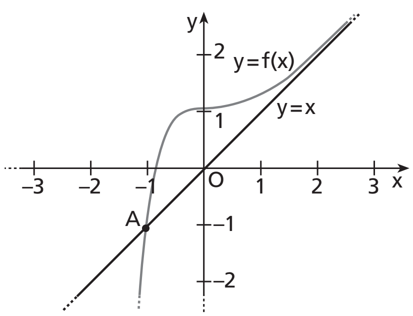
$u'(x) < 0$ per $x < 0 \rightarrow u(x)$ decrescente;

$u'(x) > 0$ per $x > 0 \rightarrow u(x)$ crescente

$u'(x) = 0$ per $x = 0 \rightarrow (0; 0)$ min. rel. e ass.

Pertanto $f'(x) = u(x)e^{-2x} \geq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = u(x)e^{-2x} = 0$ soltanto se $x = 0$; quindi la f è monotòna crescente $\forall x \in \mathbb{R}$ e interseca una sola volta l'asse delle ascisse.
Completiamo lo studio di f con la derivata seconda.

$f''(x) = 4xe^{-2x} \rightarrow$ per $x < 0$ la concavità è rivolta verso il basso;
per $x > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto;
nel punto (0; 1) flesso orizzontale.



◀ **Figura 5.**

Per determinare lo zero di f utilizziamo il metodo di bisezione. Nella tabella sono riportati i risultati di tre iterazioni a partire dall'intervallo $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

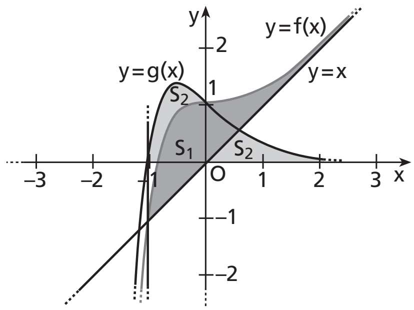
n	*a*	*b*	*f*(*a*)	*f*(*b*)	(*a* + *b*)/2	*f* [(*a* + *b*)/2]	errore
0	−1	−0,5	−1	0,859141	−0,75	0,370422	0,25
1	−1	−0,75	−1	0,370422	−0,875	−0,15567	0,125
2	−0,875	−0,75	−0,15567	0,370422	−0,8125	0,139704	0,0625
3	−0,875	−0,8125	−0,15567	0,139704	−0,84375	0,00093	0,03125

Pertanto $-0{,}84375$ è un valore approssimato dello zero di f con un'approssimazione di 0,03125.

3. L'area S_1, evidenziata nel grafico, si calcola con il seguente integrale improprio:

$$S_1 = \int_{-1}^{+\infty} (f(x) - x)\, dx = \int_{-1}^{+\infty} (x + (1 + x)e^{-2x} - x)\, dx = \int_{-1}^{+\infty} (1 + x)e^{-2x}\, dx = \int_{-1}^{+\infty} g(x)\, dx = S_2.$$

Osserviamo dunque che le aree S_1 e S_2 sono uguali.



◀ **Figura 6.**

$$\int_{-1}^{+\infty}(1+x)\,e^{-2x}\,dx=\lim_{k\to+\infty}\int_{-1}^{k}(1+x)e^{-2x}\,dx=\lim_{k\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1+x}{2}\,e^{-2x}\right]_{-1}^{k}-\left(-\frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{k}e^{-2x}\,dx\right\}=$$

$$=\lim_{k\to+\infty}\left\{\left[-\frac{1+k}{2}\,e^{-2k}-0\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\,e^{-2x}\right]_{-1}^{k}\right\}=\lim_{k\to+\infty}\left\{-\frac{1+k}{2}\,e^{-2k}-\frac{1}{4}[e^{-2k}-e^{2}]\right\}=\frac{e^2}{4}.$$

4. Considerata la generica traslazione del piano

$\tau:(x;\,y)\quad\to\quad(x';\,y')=(x+a;\,y+b),$

si tratta di determinare a e b. A questo scopo applichiamo la trasformazione all'espressione $y=g(x)$:

$$\begin{cases}x'=x+a\\y'=y+b\\y=(1+x)\,e^{-2x}\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}x=x'-a\\y=y'-b\\y'-b=(1+(x'-a))\,e^{-2(x'-a)}\end{cases},\quad\begin{cases}\dots\\\dots\\y'=(1+x'-a)\,e^{-2(x'-a)}+b\end{cases}.$$

La terza espressione deve coincidere, $\forall x\in\mathbb{R}$, con g_1. Riscriviamo nella seguente forma g_1:

$$y'=g_1(x')=e^2\frac{x'}{e^{2x'}}=x'e^{-2(x'-1)}.$$

Le due espressioni di y' coincidono soltanto se:

$(1+x'-a)\,e^{-2(x'-a)}+b=x'\,e^{-2(x'-1)}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$, quindi soltanto se

$$\begin{cases}1+x'-a=x'\\x'-a=x'-1\\b=0\end{cases},\quad\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}.$$

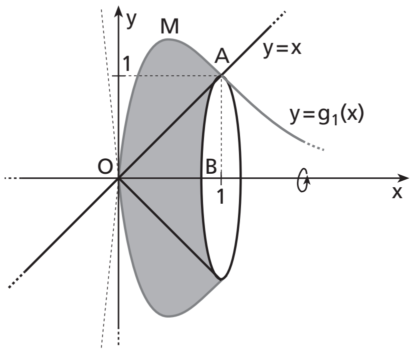
5. Utilizzando i limiti all'infinito e le derivate prima e seconda disegniamo il grafico sommario di g_1 mettendo in evidenza le intersezioni con la retta $y=x$.

$$\lim_{x\to-\infty}xe^{-2(x-1)}=-\infty,\qquad\lim_{x\to+\infty}xe^{-2(x-1)}=0;$$

$$g_1'(x)=(1-2x)\,e^{-2(x-1)},\qquad g_1''(x)=4(x-1)\,e^{-2(x-1)};$$

$$xe^{-2(x-1)}=x\quad\to\quad O(0;0),\;A(1;1).$$

Il volume richiesto V si ottiene sottraendo al solido generato dalla rotazione dell'arco di curva $\overset{\frown}{OMA}$ il cono di vertice O e apotema $\overline{OA}$.



◀ **Figura 7.**

$$V_{OMA} = \int_0^1 \pi[g_1(x)]^2\,dx = \pi\int_0^1 x^2 e^{-4(x-1)}\,dx = \pi\left\{\left[-\frac{x^2 e^{-4(x-1)}}{4}\right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 2x e^{-4(x-1)}\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\left\{\left[-\frac{x e^{-4(x-1)}}{4}\right]_0^1 - \left(-\frac{1}{4}\right)\int_0^1 e^{-4(x-1)}\,dx\right\} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8}\left[-\frac{e^{-4(x-1)}}{4}\right]_0^1 =$$

$$= -\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi}{32}(1 - e^4) = \pi\frac{e^4 - 13}{32}.$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\,\overline{BA}^2 \cdot \overline{OB} = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{3}\pi.$$

$$V = V_{OMA} - V_{cono} = \pi\frac{e^4 - 13}{32} - \frac{1}{3}\pi = \pi\frac{e^4}{32} - \pi\frac{71}{96}.$$

QUESTIONARIO

1 Fissato un ordine di disposizione dei giocatori il numero delle distribuzioni al primo giocatore è dato dalle combinazioni semplici delle 40 carte prese a 10 a 10, ossia $\binom{40}{10}$; quello del secondo dalle combinazioni delle rimanenti 30 carte prese a 10 a 10, quindi $\binom{30}{10}$; per il terzo e il quarto le corrispondenti distribuzioni sono $\binom{20}{10}$ e $\binom{10}{10} = 1$. In totale:

$$\binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}.$$

I quattro giocatori si possono disporre in 4! modi diversi quindi, nel secondo caso, i modi possibili di distribuzione delle 40 carte sono:

$$4! \cdot \binom{40}{10} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10}.$$

2 Se in 14,3 giorni il numero di nuclei rimasti in vita è dimezzato significa che la probabilità per un nucleo di essere ancora in vita dopo tale intervallo è $\frac{1}{2}$; pertanto:

$\int_0^{14,3} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \frac{1}{2}$. Calcoliamo l'integrale:

$$\int_0^{14,3} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda z}\right]_0^{14,3} = -e^{-\lambda \cdot 14,3} + 1 \rightarrow$$

$$1 - e^{-\lambda \cdot 14,3} = \frac{1}{2}, \quad e^{-\lambda \cdot 14,3} = \frac{1}{2}, \quad e^{\lambda \cdot 14,3} = 2 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{14,3} \quad \text{c.v.d.}$$

La probabilità per un nucleo di avere una durata di vita superiore a 20 giorni si ottiene sottraendo da 1 la probabilità dell'evento complementare, che è il decadimento entro 20 giorni:

$$1 - p(0; 20) = 1 - \int_0^{20} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = 1 - (1 - e^{-20\lambda}) = e^{-\frac{20}{14,3}\ln 2} \simeq 0,379\ldots.$$

Possiamo anche calcolare direttamente la probabilità richiesta mediante il seguente integrale improprio:

$$p(20; +\infty) = \int_{20}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda z}\,dz = \ldots = \lim_{t \to +\infty}[-e^{-\lambda t} + e^{-\lambda \cdot 20}] = e^{-\frac{20}{14,3}\ln 2}.$$

Il risultato ottenuto è uguale a quello precedente.

3 La funzione valore assoluto per definizione è non negativa quindi l'equazione è equivalente al sistema:

$\begin{cases} x > 0 \\ \ln x - 1 = 0 \\ e^x + k = 0 \end{cases}$, dove abbiamo esplicitato anche il campo di esistenza del logaritmo.

Risolvendo otteniamo:

$$\begin{cases} x = e \\ e^e + k = 0 \end{cases} \rightarrow k = -e^e.$$

La risposta corretta è e).

4 Il sistema ha 3 equazioni e 3 incognite quindi per la regola di Cramer è *determinato* soltanto se il determinante dei coefficienti è diverso da 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 1 & 1 \\ -\lambda & 1 & \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \quad \rightarrow \quad 3\lambda^2 - 3 \neq 0, \ \lambda \neq \pm 1$$

Se $\lambda = -1$ otteniamo il seguente sistema particolare:

$$\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}.$$

Riconosciamo immediatamente che il sistema ottenuto è *impossibile* perché la prima e la terza equazione sono incompatibili (la medesima espressione è uguagliata a due numeri diversi). Del resto confrontando la matrice incompleta con quella completa vediamo che hanno caratteristica diversa:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad c_i = 2; \qquad M_s = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad c_s = 3;$$

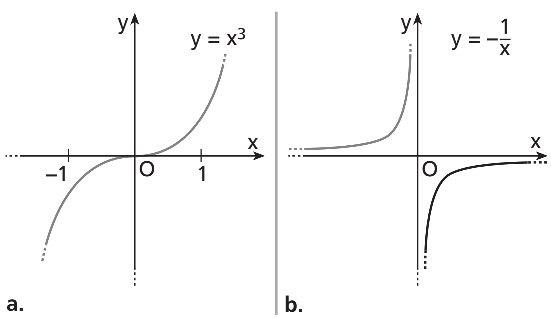
poiché $c_i < c_s$, per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è *impossibile.*
Se $\lambda = 1$ otteniamo un altro sistema particolare:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}.$$

Il sistema ha 2 equazioni e 3 incognite; la matrice incompleta e quella completa hanno caratteristica 2 (la matrice completa ha una colonna in più con tutti gli elementi nulli). Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema è indeterminato con ∞^1 soluzioni che possiamo esprimere attribuendo a x un qualsiasi valore reale:

$$\begin{cases} x = k \\ y = -3k \\ z = 4k \end{cases}, \; k \in \mathbb{R}.$$

5 Una funzione $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice crescente su A se $f(x_1) < f(x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$.
La funzione f, derivabile in A, può essere crescente su A e avere derivata nulla in qualche punto. Per esempio la funzione $f(x) = x^3$, $x \in [-1; 1]$, è crescente sull'intervallo $[-1; 1]$ ma $f'(0) = 0$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ non è necessaria.
Se la derivata di f è positiva $\forall x \in A$ può tuttavia accadere che $f(x_1) > f(x_2)$ per qualche $x_1, x_2 \in A$, $x_1 < x_2$.
Per esempio la funzione $f(x) = -\dfrac{1}{x}$, $x \in (\mathbb{R} - \{0\})$, è derivabile in tutto il dominio però $f(-1) > f(1)$ pur essendo $-1 < 1$. Questa funzione è crescente nei due sottoinsiemi disgiunti $\mathbb{R}^-$ ed $\mathbb{R}^+$ ma non su $(\mathbb{R} - \{0\})$. Pertanto la condizione $f'(x) > 0$ $\forall x \in A$ non è sufficiente.
La proposizione è dunque falsa.



◀ **Figura 8.**

6 Poniamo $f(x) = \ln x + \cos x + x$. La funzione così definita ha per dominio $\mathbb{R}^+$ ed è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}^+$. Poiché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

esiste almeno un intervallo $[a;\ b] \subset \mathbb{R}^+$ per cui $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$; pertanto per il teorema di esistenza degli zeri esiste almeno un $x_0 \in]a;\ b[$ tale che $f(x_0) = 0$.
Determiniamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{sen} x + 1.$$

Poiché $\frac{1}{x} > 0 \wedge (1 - \operatorname{sen} x) \geq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, allora $f'(x) > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^+$ e la funzione è monotona crescente. Dunque la funzione si annulla una volta soltanto e l'equazione data ha un'unica soluzione.
L'intervallo $\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right]$ soddisfa le condizioni richieste; infatti:

L'ampiezza è $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, $\quad f\left(\frac{1}{4}\right) < 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) > 0.$

7 **a)** I casi favorevoli corrispondono alle seguenti uscite:

esce 5 nel 1° lancio, esce un numero diverso da 5 negli altri due;
esce 5 nel 2° lancio, esce un numero diverso da 5 negli altri due;
esce 5 nel 3° lancio, esce un numero diverso da 5 negli altri due.

Le tre uscite sono equiprobabili e la probabilità di ciascuna di esse corrisponde al prodotto logico degli eventi che la compongono:

$$p(5; \neg 5; \neg 5) = p(\neg 5; 5; \neg 5) = p(\neg 5; \neg 5; 5) = p(5) \cdot p(\neg 5) \cdot p(\neg 5) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}.$$

Poiché ogni uscita esclude le altre, la probabilità di averne una qualsiasi si calcola con la somma delle probabilità dei tre eventi incompatibili:

$$p_{tot} = 3p(5; \neg 5; \neg 5) = 3 \cdot \frac{25}{216} = \frac{25}{72}.$$

Si può anche procedere calcolando i casi possibili e quelli favorevoli.
I casi possibili sono tutte le terne ottenibili dai tre lanci, ovvero le disposizioni con ripetizione di 6 elementi presi a 3 a 3: $D'_{6,3} = 6^3$.
I casi favorevoli sono tutte le terne del tipo $(5; \neg 5; \neg 5)$, $(\neg 5; 5; \neg 5)$, $(\neg 5; \neg 5; 5)$ ovvero il triplo delle disposizioni con ripetizione di 5 elementi (i numeri 1, 2, 3, 4, 6) presi a 2 a 2: $3D'_{5,2} = 3 \cdot 5^2$.
La probabilità dell'evento è dunque:

$$p_a = \frac{3D'_{5,2}}{3D'_{6,3}} = \frac{3 \cdot 5^2}{6^3} = \frac{25}{72}.$$

b) La somma 8 si può ottenere nei seguenti 5 modi:

$$2 + 6,\ 3 + 5,\ 4 + 4,\ 5 + 3,\ 6 + 2.$$

I possibili esiti del lancio di due dadi sono le disposizioni con ripetizione di 6 elementi presi a 2 a 2: $D'_{6,2} = 6^2$. La probabilità dell'evento è dunque:

$$p_b = \frac{5}{D'_{6,2}} = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}.$$

Poiché $\frac{25}{72} > \frac{5}{36}$ l'evento con probabilità maggiore è il primo.

8 Troviamo il dominio di f:

$$\begin{cases} x+1\geq 0 \\ \sqrt{x+1}+1>0 \\ \sqrt{x+1}-1>0 \end{cases} \rightarrow x>0.$$

Dunque le funzioni hanno entrambe come dominio $\mathbb{R}^+$ e, in esso, sono la stessa funzione:

$$\ln(\sqrt{x+1}+1)+\ln(\sqrt{x+1}-1)=\ln[(\sqrt{x+1}+1)\cdot(\sqrt{x+1}-1)]=\ln(x+1-1)]=\ln x.$$

La costante è ovviamente zero.
Osserviamo che il corollario del teorema di Lagrange non è applicabile a tutto il dominio in quanto è un intervallo aperto ma si può applicare ad ogni intervallo $[a;\ b]\subset\mathbb{R}^+$.

9 Determiniamo i primi elementi della successione:

n	1	2	3	4	5
a_n	1	3	8	16	27

a) $a_{n+1}-a_n=3n-1>0\ \ \forall n\in\mathbb{N}$, dunque la successione è crescente.
b) Dimostriamo per induzione.
$P(1)=$ «$a_1\geq 1^2$» è vera perché $1=1^2$.
Per $n>1$, supposta vera $P(n)=$ «$a_n\geq n^2$», abbiamo:

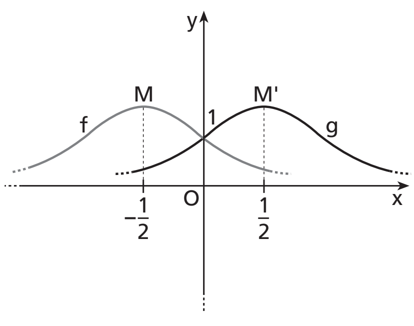
$$a_{n+1}=a_n+3n-1\geq n^2+3n-1=n^2+2n+1-1+n-1=(n+1)^2+n-2\geq(n+1)^2;$$

dunque $P(n+1)$ risulta vera e la tesi è dimostrata.

10 Eseguiamo uno studio sommario delle due funzioni.
L'asse x è asintoto orizzontale per entrambe le funzioni. Inoltre:

$$f'(x)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2},\qquad g'(x)=-\frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}.$$

Ora tracciamo il grafico approssimato.



◀ **Figura 9.**

Con l'aiuto del grafico riconosciamo che la simmetria assiale che trasforma la funzione f nella g è quella rispetto all'asse y:

$$\sigma:(x;\ y)\rightarrow(x';\ y')=(-x;\ y)\rightarrow y=\frac{1}{(-x)^2+(-x)+1}=\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Sempre con l'osservazione del grafico vediamo che la traslazione cercata può essere individuata mediante il vettore $\overrightarrow{MM'}$, dove M è il punto di massimo della f, M' quello di g.

$$f'(x) = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}; \qquad g'(x) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Il vettore di traslazione e le corrispondenti equazioni sono:

$$\overrightarrow{MM'} = (1; 0), \qquad \tau: \begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y \end{cases}.$$

Si può procedere anche partendo direttamente dalla traslazione:

$$\tau: \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}.$$

Sostituiamo nell'espressione della f e confrontiamo l'espressione ottenuta con quella della g:

$$f \rightarrow y' - b = \frac{1}{(x' - a)^2 + (x' - a) + 1}, \qquad g \rightarrow y' = \frac{1}{x'^2 - x' + 1}.$$

Le due espressioni coincidono se:

$$\begin{cases} (x' - a)^2 + (x' - a) + 1 = x'^2 - x' + 1 \\ y' - b = y' \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x'^2 + (-2a + 1)\,x' + a^2 - a = x'^2 - x' \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a + 1 = -1 \\ a^2 - a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}.$$

Per esercitarti ancora sugli argomenti trattati nel	Svolgi il
Problema 1	• Problema 1-a)-b) pag. W 172 • Esercizio 283 pag. W 125 • Quesito 9 pag. W 175 • Problema 74 pag. L 372
Problema 2	• Problema 19 pag. W 138 • Problema 1 pag. W 162 • Problema 1 pag. W 170 • Problema 1-c) pag. W 176 • Quesito 12 pag. J_1 120
Quesito 1	• Quesito 6 pag. W 175
Quesito 2	• Quesito 9 pag. W 175 • Problema 1-c)-d)-e) pag. W 172
Quesito 3	• Esercizio 466 pag. N 70 • Esercizio 471 pag. N 70
Quesito 4	• Esercizio 27 pag. W 184
Quesito 5	• Quesito 1 pag. V 288
Quesito 6	• Quesito 6 pag. V 136 • Problema 1-c) pag. W 176
Quesito 7	• Quesito 9 pag. W 177
Quesito 8	• Quesito 4 pag. V 282
Quesito 9	• Esercizio 205 pag. S 158 • Esercizio 215 pag. S 159
Quesito 10	• Quesito 3 pag. W 171