

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A , una retta r passante per O , il punto B , ulteriore intersezione di r con γ , il punto C intersezione di r con t .

La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P . Al variare di r , P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proposizioni:

$$OD : DB = OA : DP$$

$$OC : DP = DP : BC$$

ove D è la proiezione ortogonale di B su OA .

2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy , l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$;

3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ .

■ **PROBLEMA 2**

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;

2. $f(0) = 2$;

3. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2}$.

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G .

Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G .

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)} dx$.

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r .

QUESTIONARIO

- 1** Quante partite di calcio della serie A vengono disputate complessivamente (andata e ritorno) nel campionato italiano a 18 squadre?
- 2** Tre scatole A, B e C contengono lampade prodotte da una certa fabbrica di cui alcune difettose. A contiene 2000 lampade con il 5% di esse difettose, B ne contiene 500 con il 20% difettose e C ne contiene 1000 con il 10% difettose.
Si sceglie una scatola a caso e si estrae a caso una lampada. Qual è la probabilità che essa sia difettosa?
- 3** Qual è la capacità massima, espressa in centilitri, di un cono di apotema 2 dm?
- 4** Dare un esempio di polinomio $P(x)$ il cui grafico tagli la retta $y=2$ quattro volte.
- 5** Dimostrare, usando il **teorema di Rolle** [da *Michel Rolle*, matematico francese (1652-1719)], che se l'equazione:
$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$
ammette radici reali, allora fra due di esse giace almeno una radice dell'equazione:
$$nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1 = 0$$
- 6** Si vuole che l'equazione $x^3 + bx - 7 = 0$ abbia tre radici reali. Qual è un possibile valore di b ?
- 7** Verificare l'uguaglianza
$$\pi = 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$
e utilizzarla per calcolare un'approssimazione di π , applicando un metodo di integrazione numerica.
- 8** Dare un esempio di solido il cui volume è dato da $\int_0^1 \pi x^3 dx$.
- 9** Di una funzione $f(x)$ si sa che ha derivata seconda uguale a $\sin x$ e che $f'(0) = 1$.
Quanto vale $f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0)$?
- 10** Verificare che l'equazione $x^3 - 3x + 1 = 0$ ammette tre radici reali. Di una di esse, quella compresa tra 0 e 1, se ne calcoli un'approssimazione applicando uno dei metodi numerici studiati.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

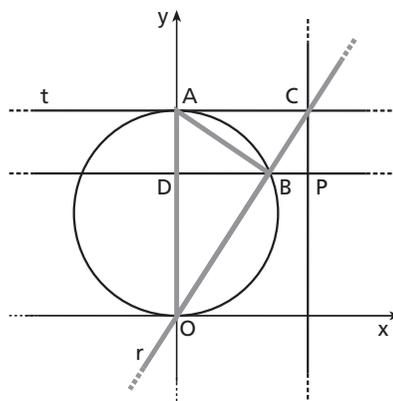
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003

PROBLEMA 1

1. Con riferimento alla figura 1 si osserva che la similitudine tra i triangoli ODB e OAC permette di scrivere: $OD : DB = OA : AC$; essendo $AC = DP$ la prima proporzione è dimostrata.

Il triangolo OAB è inscritto in una semicirconferenza, quindi $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2}$, i triangoli OAC e ABC sono simili, quindi: $OC : AC = AC : BC$ che equivale alla seconda proporzione, essendo ancora $AC = DP$.



► Figura 1.

2. Scegliendo il sistema di riferimento come in figura 1, l'equazione cartesiana del luogo Γ si otterrà dalle coordinate del punto P .

Le coordinate di B sono date dall'intersezione tra il cerchio γ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

$$B: \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{am}{1+m^2} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

Le coordinate di C sono date dall'intersezione tra la retta $y = a$ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

$$C: \begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = a \end{cases}$$

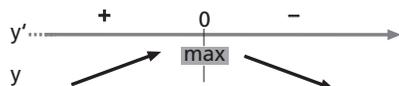
Ma $y_P = y_B$ e $x_P = x_C$, dunque $P: \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$, allora ricavando m dalla prima equazione e sostituendo

$$\text{do nella seconda si ottiene: } y = \frac{a \left(\frac{a}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

3. $\Gamma: y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ è una funzione definita $\forall x \in \mathbb{R}$, pari (simmetrica rispetto all'asse delle y), e sempre positiva. Interseca l'asse delle y nel punto $A(0; a)$, non interseca l'asse delle x .
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = 0$, il grafico ha un asintoto orizzontale $y = 0$.

$$y' = \frac{-2a^3x}{(x^2 + a^2)^2} > 0, \text{ per } x < 0.$$

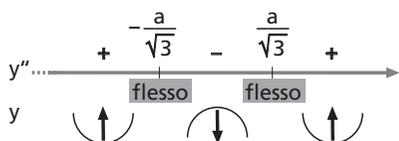
Il punto $A(0; a)$ è un punto di massimo (figura 2).



◀ Figura 2.

$$y'' = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} > 0, \text{ per } x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ e per } x > \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

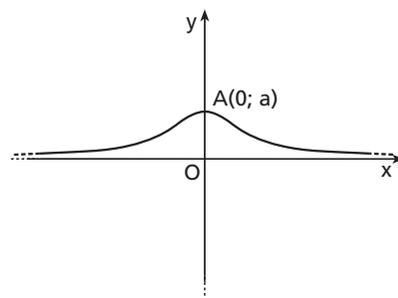
La concavità ha l'andamento di figura 3.



◀ Figura 3.

Si hanno due punti di flesso: $F_1\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$ e $F_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3}{4}a\right)$.

In definitiva il grafico è quello rappresentato in figura 4.



▲ Figura 4.

L'area del cerchio γ è $\pi \cdot \frac{a^2}{4}$

L'area compresa tra Γ e l'asintoto $y=0$ si ottiene da: $2 \int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} dx = 2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^k \frac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} dx$, ponendo

do $t = \frac{x}{a}$, si ottiene $2 \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[a^2 \cdot \arctg\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^k = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$, quindi è pari a quattro volte quella del cerchio γ .

PROBLEMA 2

1. Se la funzione è pari, allora

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c \Rightarrow a(2^x - 2^{-x}) = b(2^x - 2^{-x}) \Rightarrow a = b.$$

2. $f(0) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$.

$$3. \int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2} \Rightarrow \int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c) dx = \left[a \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - b \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx \right]_0^1 = \frac{2a+b}{2 \ln 2} + c = \frac{3}{2 \ln 2}.$$

Le tre condizioni costituiscono il sistema
$$\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \\ \frac{2a+b}{2 \ln 2} + c = \frac{3}{2 \ln 2} \end{cases}$$
 con soluzioni
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$
, quindi la funzione cercata è
$$g(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x}.$$

Studiamo la funzione $g(x)$.

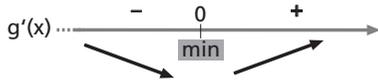
È definita positiva su tutto \mathbb{R} ; la funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse delle y .

Il grafico interseca l'asse delle y nel punto $(0; 2)$, non interseca l'asse delle x .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$, il grafico non presenta asintoti orizzontali.

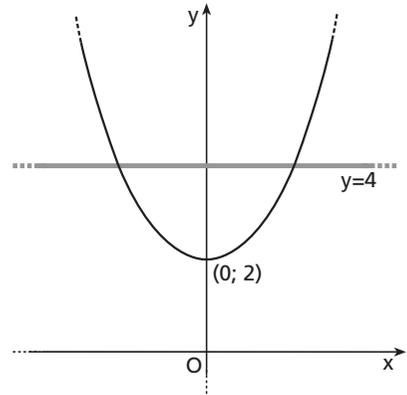
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2}{1} = +\infty$, il grafico non presenta asintoti obliqui.

$g'(x) = (2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2 > 0$, se $x > 0$. Il punto $(0; 2)$ è un punto di minimo (figura 5).



◀ Figura 5.

$g''(x) = (2^x + 2^{-x}) \cdot \log^2 2 > 0, \forall x$. Non ci sono flessi, la concavità è sempre rivolta verso l'alto. Il grafico è rappresentato in figura 6.



▲ Figura 6.

x_1	x_2	$h(x_1)$	$h(x_2)$	α
1	2	-3	1	1,5
1,5	2	-2,31...	1	1,75
1,75	2	-1,14...	1	1,875
1,875	2	-0,22...	1	1,9375
1,875	1,9375	-0,22...	0,35...	...

Determiniamo le intersezioni tra la retta $y = 4$ e $y = g(x)$:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} - 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di bisezione alla funzione $h(x) = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$:

Si arriva infine al valore $\alpha = 1,89997$.

$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$, valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Il valore dell'area richiesta è data dall'integrale:

$$2 \int_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x}) dx = 2 \left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} = 8 \log_2(2 + \sqrt{3}) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{\ln 2} \right) \cong 5,2044$$

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{2^x}{1 + 2^{2x}} dx, \text{ posto } t = 2^x \text{ e } dt = (2^x \ln 2) dx, \text{ segue:}$$

$$\frac{1}{\ln 2} \int \frac{t}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\ln 2} \cdot \arctg(2^x) + c.$$

Le equazioni della simmetria assiale, con asse la retta $y = 4$ sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}, \text{ dunque } y' = g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}.$$

QUESTIONARIO

- 1** Le partite disputate sono pari alle disposizioni di 2 squadre distinte, ovvero le disposizioni semplici di 18 elementi distinti di classe 2:

$$D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306.$$

- 2** Detti A, B, C, E gli eventi così definiti:

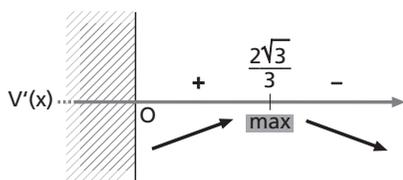
A = estrazione di una lampada dalla scatola A;
 B = estrazione di una lampada dalla scatola B;
 C = estrazione di una lampada dalla scatola C;
 E = estrazione di una lampada difettosa.

Per il teorema delle probabilità totali: $P(E) = P(E|A) \cdot P(A) + P(E|B) \cdot P(B) + P(E|C) \cdot P(C)$, nel caso in

$$\text{esame: } P(E) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{60} \cong 0,1167.$$

- 3** Detta x l'altezza del cono e r la misura del raggio di base, si ha: $r = \sqrt{4 - x^2}$, dunque il volume risulta:

$$V(x) = \frac{1}{3} \pi (4 - x^2) x. \text{ Per i vincoli geometrici del problema, } 0 \leq x \leq 2.$$



◀ **Figura 7.**

Si studia la derivata prima: $V'(x) = \frac{1}{3} \pi (4 - 3x^2) > 0$, per $0 < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Lo schema di figura 7 mostra che

il valore massimo si ha per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Il volume corrispondente è pari a

$$V_{\max} = \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} \text{ dm}^3 = 100 \cdot \frac{16\pi\sqrt{3}}{27} \text{ cl} \cong 322,45 \text{ cl}.$$

- 4** $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3) + 2$.

- 5** Il teorema di Rolle afferma:

“Data una funzione reale di variabile reale $y = f(x)$, definita nell’intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, se la funzione soddisfa le ipotesi:

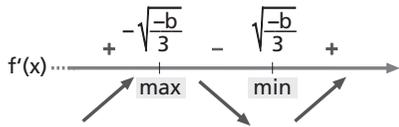
- è continua in $[a, b]$
- è derivabile in $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

allora esiste un numero reale c appartenente all’intervallo tale che $f'(c) = 0$ ”.

Nel caso in esame: $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ è una funzione polinomiale, sempre continua e derivabile, con derivata $f'(x) = nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1$.

Se a e b sono due radici reali, allora $f(a) = f(b) = 0$, la funzione nell’intervallo $[a, b]$ verifica il teorema di Rolle e quindi esiste almeno un punto c interno all’intervallo in cui la derivata prima si annulla: tale punto è la radice cercata.

- 6** L'equazione possiede tre radici reali se la funzione $x^3 + bx - 7 = 0$, continua e derivabile ovunque, interseca tre volte l'asse delle ascisse. La cubica deve possedere un massimo e un minimo relativo e questi devono avere segno discorde. La derivata prima $f'(x) = 3x^2 + b$ possiede due radici distinte, $x = \pm \sqrt{\frac{-b}{3}}$, se $b < 0$. $f'(x) = 3x^2 + b > 0$, se $x < -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ o $x > \sqrt{\frac{-b}{3}}$. Lo schema in figura 8 mostra che per $x = -\sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un massimo e per $x = \sqrt{\frac{-b}{3}}$ si ha un minimo.



◀ Figura 8.

$$f\left(\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) < 0 \Rightarrow \frac{2b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - 7 < 0, \forall b < 0. \text{ Poiché } f(0) = -7, \text{ il minimo è sempre negativo.}$$

$$\text{Invece: } f\left(-\sqrt{\frac{-b}{3}}\right) > 0 \Rightarrow \frac{b\sqrt{-b}}{3\sqrt{3}} - \frac{b\sqrt{-b}}{\sqrt{3}} - 7 > 0 \Rightarrow -b^3 > \frac{49 \cdot 27}{4} \Rightarrow b < \sqrt[3]{\frac{-1323}{4}} \cong -6,92.$$

Quindi $b = -7$, per esempio soddisfa già la condizione richiesta.

7 $4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = 4[\arctg x]_0^1 = 4(\arctg 1 - \arctg 0) = \pi.$

Per il calcolo approssimato di π si può utilizzare il metodo dei rettangoli, dividendo l'intervallo $[0; 1]$ in $n = 5$ parti uguali, si ottiene:

$$4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \cong 4 \cdot \frac{1-0}{5} \left[f(0) + f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \right] = \frac{4}{5} \left[1 + \frac{25}{26} + \frac{25}{29} + \frac{25}{34} + \frac{25}{41} \right],$$

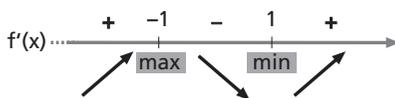
ovvero $\pi \cong 3,35$. Aumentando il numero n si può migliorare l'approssimazione.

- 8** Il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse delle ascisse della curva $y = f(x)$ in $[a; b]$ è $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Nel caso in esame $V = \pi \int_0^1 x^3 dx$, dunque la rotazione attorno all'asse delle ascisse di $y = x^{\frac{3}{2}}$ in $[0; 1]$ genera il solido.

9 $\begin{cases} f''(x) = \sin x \\ f'(0) = 1 \end{cases}$, integrando si ottiene: $f'(x) = \int \sin x dx = -\cos x + k_1, f'(0) = 1 \Rightarrow k_1 = 2.$

$$f(x) = \int (-\cos x + 2) dx = -\sin x + 2x + k_2. \text{ Allora } f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f(0) = \pi - 1.$$

- 10** Analogamente al quesito 6 la funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ ha tre intersezioni con l'asse delle ascisse se possiede un massimo ed un minimo relativo e questi sono di segno discorde. La funzione è continua e derivabile su tutto \mathbb{R} . $f'(x) = 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x < -1 \cup x > 1$. Per $x = -1$ si ha un punto di massimo di ordinata $f(-1) = 3$. Per $x = 1$ si ha un punto di minimo di ordinata $f(1) = -1$ (figura 9).



◀ Figura 9.

Essendo $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$, per il teorema di esistenza degli zeri, la funzione ammette uno zero all'interno dell'intervallo $[0; 1]$.

Utilizzando il metodo di bisezione:

x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	α
0	1	1	-1	0,5
0	0,5	1	-0,375	0,25
0,25	0,5	0,266	-0,375	0,375
0,25	0,375	0,266	-0,072	0,3125
0,3125	0,375	0,093	-0,072	...

Si giunge infine al valore $\alpha \cong 0,3473$.

Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nel	Svolgi il
Problema 1	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 18 pag. W 138 • Problema 24 pag. W 139 • Problema 25 pag. W 139
Problema 2	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 14 pag. N 97 • Problema 7 pag. ι 31 • Problema 19 pag. W 138 (punti a, b)
Quesito 1	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 11 pag. α 40 • Problema 15 pag. α 99
Quesito 2	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 14 pag. α 95 • Problema 15 pag. α 95 • Problema 17 pag. α 95
Quesito 3	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 13 pag. π 97
Quesito 5	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 1 pag. V 136 • Problema 18 pag. V 138 (punti a, b) • Quesito 3 pag. V 288
Quesito 6	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 18 pag. ι 34
Quesito 7	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 8 pag. ι 57 • Problema 17 pag. ι 59 • Problema 17 pag. W 153 (punto c)
Quesito 8	<ul style="list-style-type: none"> • Problema 12 pag. W 152 • Problema 13 pag. W 152
Quesito 9	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 1 pag. W 70
Quesito 10	<ul style="list-style-type: none"> • Quesito 1 pag. ι 62 • Quesito 6 pag. ι 62