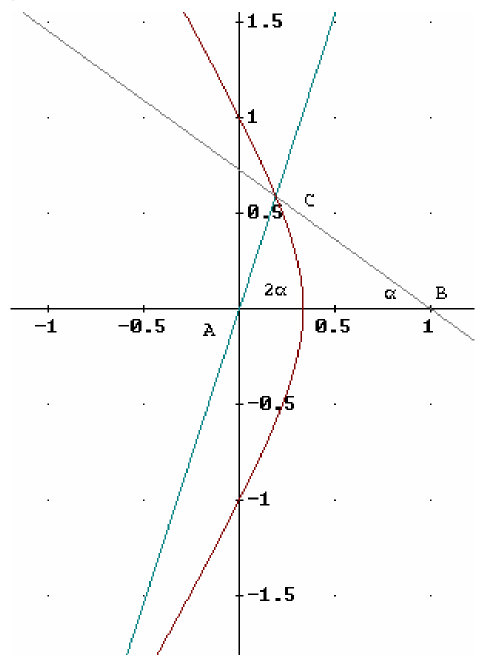
Soluzione a cura di:
Alessandra Biglio, Liceo Classico *'Vittorio Alfieri'*, Torino
Giuliana Brun, Liceo Scientifico *'Isaac Newton'*, Chivasso (TO)
Claudia Chanu, *IRRE* Val d'Aosta
Antonella Cuppari, Liceo Scientifico *'Galileo Ferraris'*, Torino

PROBLEMA 1.

1. Fissiamo un sistema di riferimento in cui $A(0;0)$, $B(1;0)$, $C(x;y)$: siano α l'angolo $A\hat{B}C$ e 2α l'angolo $C\hat{A}B$, con $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$. Ricordando che il coefficiente angolare di una retta è la tangente trigonometrica dell'angolo da essa formato col semiasse positivo delle ascisse, le equazioni delle rette AC e BC sono, rispettivamente, $y=(\tan 2\alpha)x$ e $y=(\tan(\pi-\alpha))(x-1)=-(\tan\alpha)(x-1)$. Le coordinate del punto C si possono determinare, in funzione di α, come intersezione delle due rette: risolvendo il sistema si ottiene $\begin{cases} x=\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha+\tan\alpha} \\ y=\tan 2\alpha\cdot\dfrac{\tan\alpha}{\tan 2\alpha+\tan\alpha}\end{cases}$. Indicando con $t=\tan\alpha$, ricordando che $\tan 2\alpha=\dfrac{2t}{1-t^2}$ e sostituendo, otteniamo le equazioni parametriche del luogo geometrico: $\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{3-t^2} \\ y=\dfrac{2t}{3-t^2}\end{cases}$.

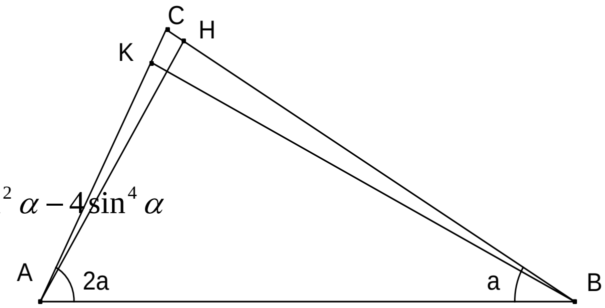
   Eliminiamo t, ricavando $t^2=\dfrac{1-3x}{1-x}$ dalla prima relazione e sostituendolo nella seconda, elevata al quadrato: si ha, così, $y^2=(1-3x)(1-x)$, che è l'equazione del luogo geometrico γ.



2. Sviluppando i calcoli indicati, si ottiene $y^2-3x^2+4x-1=0$, che è l'equazione di una iperbole centrata nel punto $\left(\dfrac{2}{3};0\right)$, con parametri $a=\dfrac{1}{3}$ e $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, come si nota raccogliendo un fattore 3, $y^2-3\left(x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{1}{3}\right)=0$, e completando il quadrato come $y^2-3\left(x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{4}{9}\right)+\dfrac{1}{3}=0$, da cui $3\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-y^2=\dfrac{1}{3}$, che dà $9\left(x-\dfrac{2}{3}\right)^2-3y^2=1$. Poiché per poter ottenere un triangolo con $C\hat{A}B=2A\hat{B}C$, dev'essere $x<\dfrac{1}{2}$, si deve considerare soltanto il ramo di iperbole di vertice $\left(\dfrac{1}{3};0\right)$. Il grafico di γ può essere

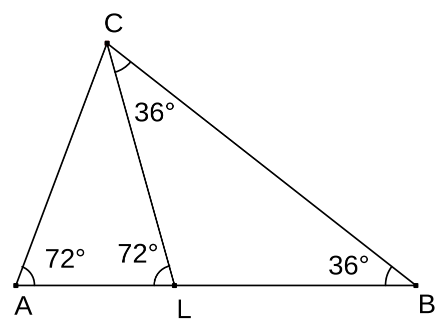
ottenuto anche attraverso lo studio delle funzioni $y = \pm\sqrt{3x^2 - 4x + 1}$, sempre tenendo conto delle condizioni geometriche.

3. Sia AH l'altezza relativa al lato BC: osserviamo che, per i teoremi sui triangoli rettangoli, $\overline{AH} = \overline{AB}\sin\alpha$ e l'altezza BK relativa al lato AC è $\overline{BK} = \overline{AB}\sin 2\alpha$. Ricordando che $\overline{AB} = 1$, la funzione da rendere massima è $S(\alpha) = \overline{AH}^2 + \overline{BK}^2 = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$.



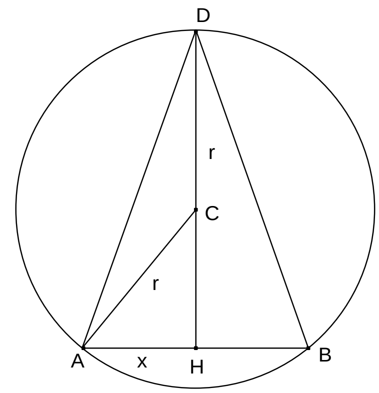
Usando le formule di duplicazione e la formula fondamentale, la funzione si può riscrivere come $S(\alpha) = \sin^2\alpha + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha = \sin^2\alpha\left(1 + 4\cos^2\alpha\right) = 5\sin^2\alpha - 4\sin^4\alpha$. La derivata di tale funzione è $S'(\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\left(5 - 8\sin^2\alpha\right)$ che, nell'intervallo considerato, cambia segno a seconda del segno del terzo fattore: l'angolo che rende massima la somma dei quadrati è dato da $\beta = \arcsin\sqrt{\frac{5}{8}} \simeq 52°14'$.

4. Posto $\alpha = 36°$, il triangolo ABC risulta isoscele sulla base AC. Tracciando la bisettrice CL dell'angolo $A\hat{C}B$, i triangoli ALC, BLC e ABC risultano isosceli di base, rispettivamente, AL, BC e AC, quindi $\overline{AC} = \overline{CL} = \overline{LB}$ e $\overline{AB} = \overline{BC} = 1$. Dal teorema della bisettrice risulta $\overline{AL} : \overline{AC} = \overline{LB} : \overline{BC}$, quindi $\overline{AL} : \overline{LB} = \overline{LB} : \overline{BC}$ e, applicando la proprietà del comporre, si ha $\left(\overline{AL} + \overline{LB}\right) : \overline{LB} = \left(\overline{LB} + \overline{BC}\right) : \overline{BC}$, da cui $1 : \overline{AC} = \left(\overline{AC} + 1\right) : 1$. Si conclude che $\overline{AC}$ soddisfa l'equazione $\overline{AC}^2 + \overline{AC} - 1 = 0$, che ha come unica soluzione accettabile $\overline{AC} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, c.v.d.



PROBLEMA 2

1. Posto $CH = x$, con $0<x<r$, si ha $AH = \sqrt{r^2 - x^2}$.



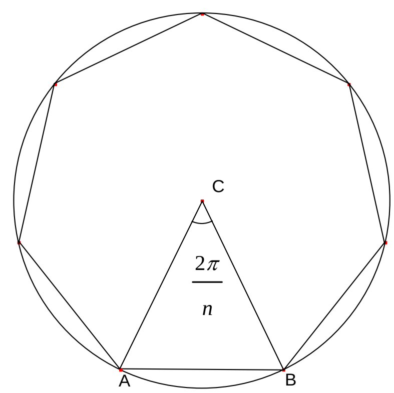
L'area del triangolo è pertanto $A(x) = \frac{1}{2} AB \cdot DH = (r+x)\sqrt{r^2 - x^2}$.

Per determinare il massimo di tale funzione calcoliamo

$$A'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)(r+x) + \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{-2x^2 - rx + r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Posto *A'(x) = 0* si ottengono due soluzioni *x= -r* e *x = r/2;* dallo studio del segno di *A'(x)* si ricava che si ha un massimo in *x = r/2* che corrisponde al triangolo equilatero.

2. Con riferimento alla figura a fianco, l'area del poligono di *n* lati inscritto in una circonferenza di raggio *r* può essere ottenuta come somma delle aree degli *n* triangoli isosceli congruenti ad ABC, che ha lato *r*, base *AB* e angolo al vertice C di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$. Quindi

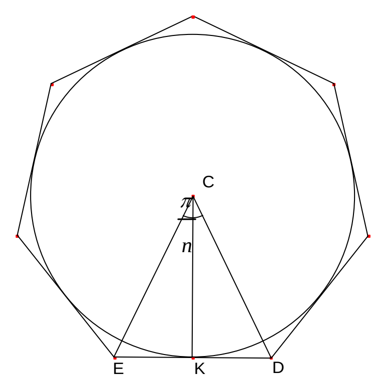


$$A_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot sen\frac{2\pi}{n} = \frac{1}{2} r^2 sen\frac{2\pi}{n}$$

$$S_n = nA_{ABC} = \frac{1}{2} nr^2 sen\frac{2\pi}{n}$$

c.v.d.

Analogamente si può dire che l'area del poligono di *n* lati circoscritto ad una circonferenza può essere ottenuta come somma delle aree degli *n* triangoli uguali avente per base il lato *DE* e come altezza il segmento *CK*. L'angolo $E\hat{C}K$, metà dell'angolo al vertice *C* di ciascuno di questi triangoli, misura $\frac{\pi}{n}$, quindi



$$DE = 2EK = 2r \cdot tg\frac{\pi}{n}, \qquad CK = r, \qquad A_{CDE} = \frac{1}{2} DE \cdot CK = r^2 tg\frac{\pi}{n},$$

$$A_{poligono\,circoscritto} = nA_{CDE} = \frac{1}{2} nr^2 tg\frac{\pi}{n}$$

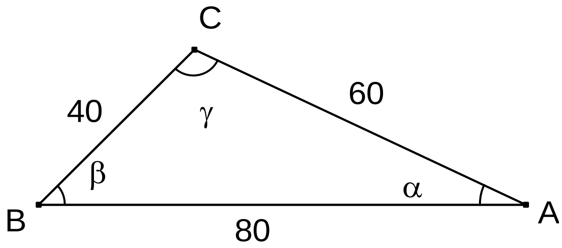
3. $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} nr^2 sen\frac{2\pi}{n} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{sen\frac{2\pi}{n}}{\frac{2}{n}} = r^2 \lim_{n\to\infty} \frac{sen\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \cdot \pi = \pi r^2$

4. Il problema consiste nel determinare un quadrato equivalente ad un cerchio di raggio dato. Benché il problema ammetta una soluzione in campo reale (il lato del quadrato equivalente ad un cerchio di raggio *r* misura infatti $l = \sqrt{\pi} r$), tale lato non è costruibile con riga e compasso. Per questo il problema della quadratura del cerchio non è risolubile con riga e compasso, come si può vedere in un testo approfondito di geometria.

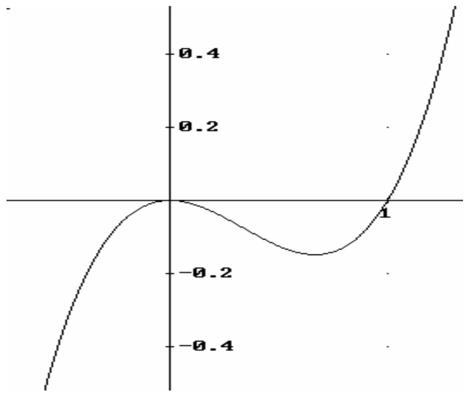
QUESTIONARIO

1. L'area di un generico triangolo equilatero di lato ℓ è $A = \frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2$. Se il lato misura $2\sqrt{x}$, allora l'area di ogni sezione triangolare è $\sqrt{3}x$, quindi il volume del solido si ottiene dall'integrale seguente $S = \int_0^1 \sqrt{3}x\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Detti α,β,γ gli angoli del triangolo, applicando il teorema del coseno (Carnot) risulta:
   $40^2 = 60^2 + 80^2 - 2\cdot 60\cdot 80\cos\alpha$ da cui
   $\cos\alpha = \frac{7}{8}$, $\alpha = (28{,}95)° = 28°57'$.
   Analogamente
   $\cos\beta = \frac{11}{16}$, $\beta = (46{,}57)° = 46°34'$ e
   $\cos\gamma = -\frac{1}{4}$, $\gamma = (104{,}48)° = 104°29'$.



3. Si tratta di determinare il numero di intersezioni della cubica di equazione $y = x^3 - x^2$ con il fascio di rette orizzontali di equazione $y = k$-1. Dallo studio del segno della derivata prima risulta che la cubica, il cui è grafico è rappresentato nella figura a fianco, possiede un massimo e un minimo relativo nei punti $M(0;\, 0)$ e N (2/3; -4/27).
   Pertanto, se k-1 >0 cioè k>1, oppure k-1< $-\frac{4}{27}$, cioè k< $\frac{23}{27}$ l'equazione avrà una sola soluzione; se k =1 oppure k = $\frac{23}{27}$, l'equazione avrà tre soluzioni di cui due coincidenti; se $\frac{23}{27}$ <k<1 l'equazione avrà tre soluzioni distinte.



4. Detta x l'altezza del cono (0<x<1), il raggio di base è $\sqrt{1-x^2}$, quindi il volume del cono, in funzione di x, è $V(x) = \frac{1}{3}\pi x(1-x^2)$, la cui derivata è $V'(x) = \frac{1}{3}\pi(1-3x^2)$. Il cono di volume massimo si ottiene per $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ e il volume massimo è
   $V\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}403\,\text{m}^3 = 0{,}403\cdot 10^3\ \text{dm}^3 = 403\,\text{litri}$

5. La funzione è definita, continua e derivabile su tutto l'asse reale, in particolare è continua sull'intervallo [-2, 2] e derivabile sull'intervallo (-2, 2). I valori $x = c$ compresi tra -2 e 2 che verificano la condizione $f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)} = \frac{16}{4} = 4$ sono $c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$. In tali punti la retta tangente è parallela alla retta secante in (-2; 0), (2; 6).

6. Dopo l'aumento del 6% il prezzo p diventa $p+\frac{6}{100}p=\frac{106}{100}p$; dopo la diminuzione del 6% il prezzo finale risulta $\left(\frac{106}{100}-\frac{6}{100}\cdot\frac{106}{100}\right)p=\frac{106\cdot 94}{10000}p=\left(1-\frac{36}{10000}\right)p$. Allo stesso prezzo finale si giunge invertendo le variazioni. Complessivamente il prezzo risulta diminuito dello 0,36%, cioè è il 99,64% del prezzo iniziale.

7. L'integrale di una funzione dispari definito su un intervallo simmetrico rispetto all'origine vale 0, come si può intuire dal significato geometrico dell'integrale definito. Quindi, si ha $\int_{-2}^{2}(3+f(x))dx=\int_{-2}^{2}3dx+\int_{-2}^{2}f(x)dx=3x\Big|_{-2}^{2}+0=12$.

8. L'equazione è definita per $\begin{cases} n\geq 4 \\ n-2\geq 3 \end{cases}\Rightarrow n\geq 5$.

$$4\frac{n!}{4!(n-4)!|}=15\frac{(n-2)!}{3!(n-5)!}$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-4)!}=\frac{15(n-2)!}{(n-5)!}$$
$$n(n-1)=15(n-4)$$
$$n^2-16n+60=0$$

da cui le soluzioni dell'equazione data sono $n=10, n=6$ entrambe accettabili.

9. L'integrale si risolve ponendo $x=\sin t$, da cui $dx=\cos t\ dt$. Si ottiene, quindi,

$$\int\sqrt{1-x^2}dx=\int\cos^2 t\ dt=\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\sin t\cos t+c=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2}\right)+c$$

Inoltre, $I=\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx==\frac{1}{2}\left(\arcsin 1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$, in accordo col significato geometrico dell'integrale, che è l'area della parte di cerchio di centro l'origine e raggio unitario racchiusa nel primo quadrante (cioè un quarto).

10. I meridiani sono le circonferenze che si ottengono intersecando la superficie sferica con i piani contenenti la retta *r*; tali circonferenze hanno tutte raggio pari al raggio della sfera. I paralleli sono le circonferenze che si ottengono intersecando la superficie sferica con piani ortogonali alla retta r che distano meno di *r* dal centro della sfera; i raggi dei paralleli misurano $\sqrt{R^2-d^2}$ con *R* raggio di *S* e *d* distanza del piano dal centro *O* di *S*. La latitudine di un punto *P* è l'angolo che il raggio *OP* forma con il piano ortogonale a *r* e passante per *O* (piano equatoriale). La longitudine di un punto *P* è l'angolo che il piano per *P* contenente l'asse *r* forma con un piano per *r* di riferimento (meridiano di Greenwich).

COMMENTO ALLA PROVA:

A nostro comune giudizio, il compito era piuttosto impegnativo.
Il primo problema, sovrabbondante di calcoli, poteva mettere in seria difficoltà anche un ragazzo preparato, il secondo problema, decisamente più fattibile, richiedeva comunque buona padronanza geometrica e trigonometrica. I quesiti erano quasi tutti affrontabili da un ragazzo ben preparato: il primo e l’ultimo non erano molto intuibili e riguardavano argomenti che di norma non si riescono a trattare in modo esauriente.

Alessandra Biglio, Giuliana Brun, Claudia Chanu, Antonella Cuppari