PROBLEMA 2

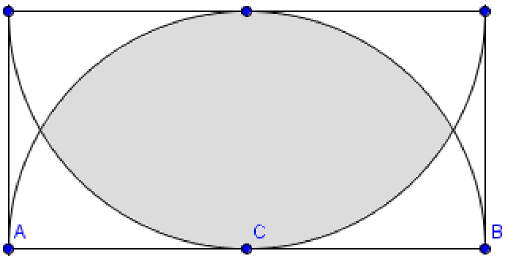
Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2, si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.

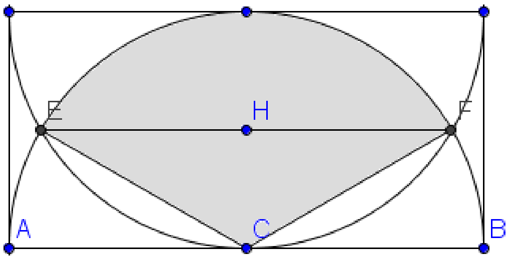
b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH. Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.

d) Si studi f(x) e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.



a) Indicando con E, F le intersezioni tra i semicerchi, l'area da calcolare è il doppio dell'area del segmento circolare delimitato dalla corda EF:



L'area del segmento circolare si può calcolare come differenza tra l'area del settore circolare ECF e l'area del triangolo ECF.

Il triangolo ECF è isoscele sulla base EF ed ha l'angolo al vertice $E\hat{C}F = 120°$.

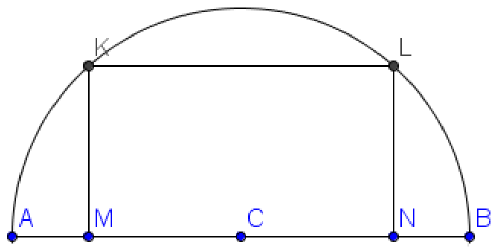
L'area del settore ECF è quindi 1/3 l'area del cerchio di centro C e raggio r = 1: area_settore(ECF) = $\dfrac{1}{3}\pi$.

L'area del triangolo ECF è data da: area(ECF) = $\dfrac{1}{2}\overline{EC} \times \overline{EF} sen(120°)$ = $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

L'area del segmento di cerchio è quindi data da: area_segmento = $\dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

e l'area della regione piana richiesta è $2\left(\dfrac{1}{3}\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

b) Γ è il semicerchio di centro C e diametro AB = 2; un rettangolo inscritto ha due vertici M, N su AB e due vertici L, K sulla semicirconferenza:

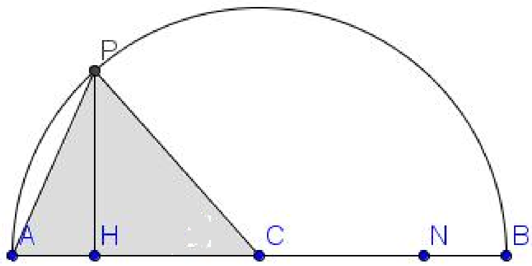


Ponendo $\overline{MC} = \overline{CN} = x$, si ha: $0 \le x \le 1$; la base del rettangolo è $\overline{MN} = 2x$, l'altezza è MK, data da:
$MK = \sqrt{\overline{CK}^2 - \overline{MC}^2} = \sqrt{1-x^2}$.

L'area del rettangolo è quindi espressa dalla funzione A(x) = $2x\sqrt{1-x^2}$, definita per ogni x per cui ha significato il problema geometrico.
L'area massima si può trovare utilizzando il calcolo differenziale.

La derivata della funzione a(x) è $a'(x) = \dfrac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$, definita per $0 \le x < 1$.

Dallo studio del segno della derivata a'(x) si trova che l'area ha valore massimo per $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$: per tale valore di x l'altezza del rettangolo è metà della base e l'area è uguale 1.



c) Dato che P è un punto qualunque della semicirconferenza, valgono per x le limitazioni: $0 < x < \pi$.
Nel triangolo PCH si ha: $\overline{PH} = \overline{PC}sen(x) = sen(x)$, $\overline{HC} = \overline{PC}|\cos(x)| = |\cos(x)|$, quindi l'area del triangolo è data da:

$S_2(x) = \dfrac{1}{2}\overline{PH} \times \overline{HC} = \dfrac{1}{2}sen(x)|\cos(x)|$.

Nel triangolo APH si ha: $\overline{AH} = \overline{AC} - \overline{HC} = 1 - \cos(\pi - x) = 1 + \cos(x)$ e l'area è data da:

$S_1(x) = \dfrac{1}{2}\overline{AH} \times \overline{PH} = \dfrac{1}{2}sen(x)(1+\cos(x))$.

La funzione f(x) è dunque definita per $x \neq 0$ e la sua espressione analitica è f(x) = $\dfrac{1+cos(x)}{|cos(x)|}$.

d) La funzione f(x) = $\dfrac{1+\cos(x)}{|\cos(x)|}$ è periodica di periodo 2π: se ne studia quindi l'andamento nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

In tale intervallo la funzione ha la condizione di esistenza $\cos(x) \neq 0$, quindi $x \neq \dfrac{\pi}{2}$ e $x \neq \dfrac{3}{2}\pi$.

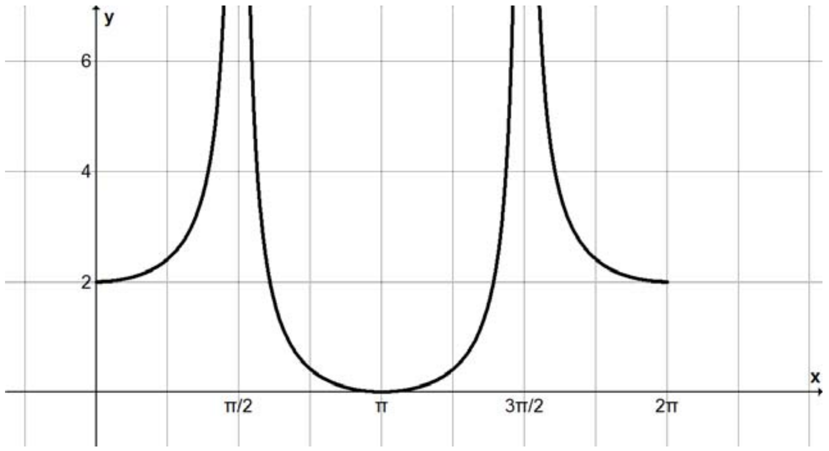
La funzione si annulla quando $1 + \cos(x) = 0$, quindi per $x = \pi$ ed è positiva negli altri punti del suo dominio.

Studiando i limiti della funzione si trova: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^{\pm}} f(x) = +\infty$, quindi le rette $x = \dfrac{\pi}{2}$ e $x = \dfrac{3}{2}\pi$ sono asintoti verticali per il grafico della funzione.

La derivata prima della funzione è f'(x) = $\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)} & \cos(x) > 0 \\ -\dfrac{sen(x)}{\cos^2(x)} & \cos(x) < 0 \end{cases}$: la funzione risulta quindi derivabile nel suo dominio; dallo studio del segno della derivata prima si trova che la funzione, all'interno del suo dominio, è strettamente crescente per 0 < x < π/2 e π < x < 3/2 π e che i punti x = 0, x = π, x = 2π sono punti di minimo per il suo grafico. Per x = π si ha f(x) = 0, per x = 0 e x = 2π si ha f(x) = 2.

La derivata seconda è f''(x) = $\pm\dfrac{\cos^2(x) + 2sen^2(x)}{\cos^3(x)}$; dallo studio del segno della derivata seconda si trova che il grafico della funzione ha concavità verso l'alto in tutto il suo dominio.

Il grafico della funzione è il seguente:



N. B.: il grafico di f(x) poteva essere ottenuto anche sommando graficamente le funzioni elementari y = $|\sec(x)|$ e y = 1.