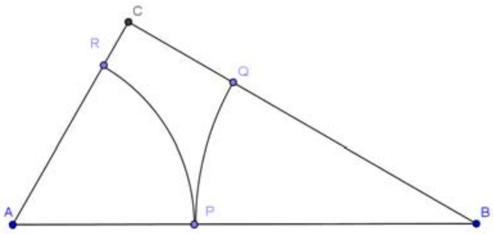
PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo CAB = $\frac{\pi}{3}$.

a) **Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinchè la costruzione sia realizzabile.**
b) **Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).**
c) **Tra i rettangoli con un cateto su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.**
d) **Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliando con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.**



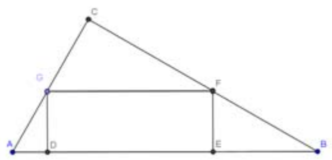
a) Le limitazioni da imporre sono: $\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}\sqrt{3}$.

b) Area (settore PQB) = $\frac{\pi x^2}{12}$ Area (settore APR) = $\frac{\pi(a-x)^2}{6}$ Area (ABC) = $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

S(x)= $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi(a-x)^2}{6} - \frac{\pi x^2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{3x^2-4ax+2a^2}{12}\pi$

Si calcola la derivata prima:S'(x)= $\frac{2a-3x}{6}\pi$ ponendo la derivata prima uguale a zero e studiando il suo segno si ottiene la superficie massima per x = $\frac{2}{3}$a , il cui valore è $\frac{a^2}{2}(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{9})$ e la superficie minima per x = $\frac{a}{2}\sqrt{3}$, di valore $\frac{a^2}{4}\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}(\frac{17}{4} - 2\sqrt{3})\right]$

c)



Ponendo GA=x ($0 < x < \frac{a}{2}$) segue GD = $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ quindi GC = $\frac{a}{2} - x$ e GF=a-2x. E quindi area(DEFG)= $\frac{ax\sqrt{3}}{2} - x^2\sqrt{3}$ .Derivando e studiandone lo zero e il segno si trova che l'area massima è $\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$ in corrispondenza di x= $\frac{a}{4}$

d) Il volume richiesto si può far in due modi:

1°Inserendo il triangolo in un sistema di assi cartesiani con origine in A, si considera le equazioni delle rette AC y= $\sqrt{3}$ x e CB y= $-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-a)$ e il volume cercato è la somma degli integrali $\int_0^{\frac{a}{4}}(\sqrt{3}x)^2\,dx+\int_{\frac{a}{4}}^{a}\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}a\right]^2 dx$ .Calcolando gli integrali si ottiene come risultato $\frac{a^3}{16}$

2°Si calcola il volume delle due piramidi a base quadrata costruite sul quadrato avente per lato l'altezza del triangolo che è $\frac{\sqrt{3}}{4}a$; la prima avente per altezza $\frac{a}{4}$, la seconda avente per altezza $\frac{3a}{4}$. I due volumi sono $V_1 = \frac{a^3}{64}$ e $V_2 = \frac{3a^3}{64}$, quindi il volume totale è $\frac{a^3}{16}$.