ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO SPERIMENTALE

PIANO NAZIONALE INFORMATICA

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove n è un intero positivo e $x \in R$

1. Si verifichi che la derivata di $f(x)$ è: $f'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}$
2. Si dica se la funzione f ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando n è dispari, $f(x) \leq 1$ per ogni x reale.
3. Si studi la funzione g ottenuta da f quando $n = 2$ e se ne disegni il grafico.
4. Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f: R \rightarrow R$ definita da $f(x) = x^3 + kx$, con k parametro reale.

1. Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).
2. Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto P in comune. Si determini l'ascissa di P approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.
3. Sia **D** la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di **D**.
4. La regione **D** è la base di un solido **W** le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di **W**.

QUESTIONARIO

1. Sia $0 < a < b$ e $x \in [-b, b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x-a| dx = a^2 + b^2$
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$ Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati).
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \frac{0}{0}; \frac{1}{0}; 0^0$$

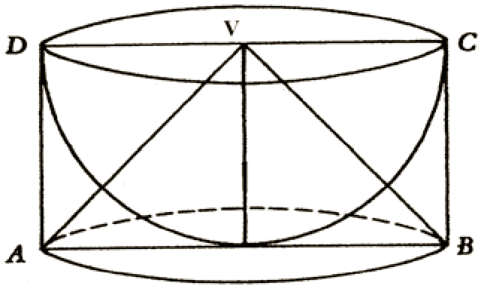
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x = 0$, con punto iniziale $x0 = 3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

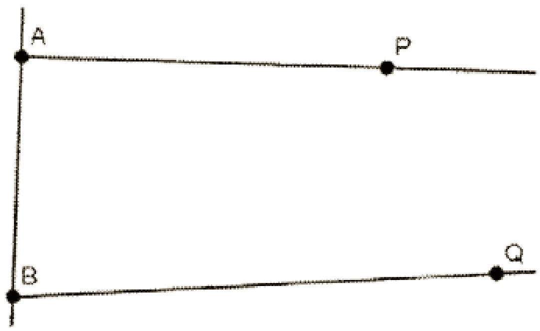
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8. Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. "*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli $P\hat{A}B$ e $Q\hat{B}A$ hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.



Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

Sia *f* la funzione definita da

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

dove *n* è un intero positivo e $x\in R$

Punto 1

Si verifichi che la derivata di $f(x)$ **è** $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

La funzione $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ può essere scritta nel modo seguente: $f(x)=e^{-x}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}$ la cui derivata, utilizzando la regola di derivazione del prodotto e sfruttando la linearità dell'operatore derivata, è

$$f'(x)=e^{-x}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{i\cdot x^{i-1}}{i!}-e^{-x}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}=e^{-x}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot x^{i-1}}{i!}-e^{-x}\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}=$$

$$=e^{-x}\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot x^{i-1}}{i!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right]=e^{-x}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{i-1}}{(i-1)!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right]\xrightarrow{k=i-1}$$

$$f'(x)=e^{-x}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right]=e^{-x}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\frac{x^n}{n!}\right)-\sum_{i=0}^{n}\frac{x^i}{i!}\right]=-\frac{x^n}{n!}\cdot e^{-x}$$

Punto 2

Si dica se la funzione *f* ammette massimi e minimi (assoluti e relativi) e si provi che, quando *n* è dispari, *f* (*x*) ≤ 1 per ogni *x* reale.

Se n=0 la funzione diventa $f(x)=e^{-x}$ che è sempre positiva e strettamente decrescente e non presenta estremi relativi ed assoluti.

La derivata prima della funzione, secondo quanto ricavato al punto 1 è $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$ e $f'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\geq 0\Rightarrow x^n\leq 0$ in quanto $e^{-x}>0\ \ \forall x\in R$. Ora distinguiamo i casi in cui n è pari o dispari:

1. n pari: la disequazione $x^n<0$ non è mai verificata e $x^n=0\Rightarrow x=0$, quindi la funzione $f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ è strettamente decrescente in tutto il suo dominio, non presenta estremi relativi e presenta un flesso a tangente orizzontale in $x=0$.

2. n dispari: la disequazione $x^n \le 0$ è verificata per $x \le 0$, quindi la funzione $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$ per cui essa presenta un massimo relativo ed assoluto per $x = 0$ e vale $f(0) = 1$. Poiché il massimo relativo coincide con quello assoluto ed è unitario deduciamo che $f(x) \le 1$ per ogni x reale.

Punto 3

Si studi la funzione *g* ottenuta da *f* quando *n* = 2 e se ne disegni il grafico.

$$g(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x}$$

Dominio: R

Intersezione asse ascisse: non ve ne sono in quanto sia $(x^2 + 2x + 2)$ che e^{-x} sono fattori sempre positivi;

Intersezione asse ordinate: $x = 0 \to y = 1$

Positività: la funzione è sempre positiva in tutto il dominio R

Asintoti verticali: non ve ne sono in quanto il dominio è tutto R

Asintoti orizzontali: applicando De L'Hospital 2 volte si ha $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2e^x}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = 0$

mentre $\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale destro;

Asintoti obliqui: se esistono hanno equazione $y = mx + q$ con $m = \lim_{x \to \pm\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\right], q = \lim_{x \to \pm\infty}[g(x) - mx]$.

Nel nostro caso

$\lim_{x \to -\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2x}\right)e^{-x}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2x}\right) \cdot \lim_{x \to -\infty} e^{-x} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ mentre

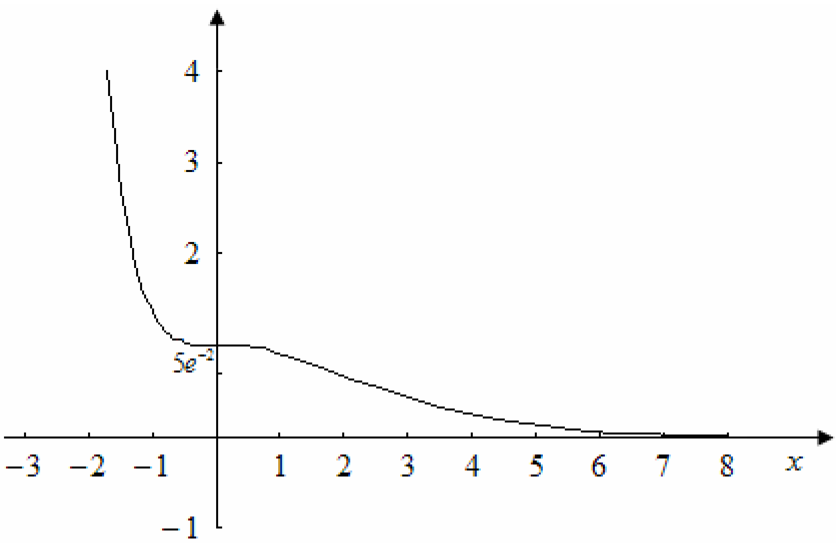
applicando De L'Hospital 2 volte

$\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{g(x)}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2xe^x}\right)\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[\frac{2x + 2}{(2x + 2)e^x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\frac{1}{e^x} = 0$ per cui non esiste né l'asintoto obliquo destro né il sinistro;

Crescenza e decrescenza: $g'(x) = -\frac{x^2}{2} \cdot e^{-x}$ per cui la funzione è strettamente decrescente in R e si annulla in $x = 0$.

Flessi: $g''(x) = -x \cdot e^{-x} + \frac{x^2}{2} \cdot e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{x^2 - 2x}{2}\right)$ per cui in $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $(0,2)$ verso il basso. La derivata terza di $g(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x}$ è $g'''(x) = e^{-x}(x-1) - e^{-x}\left(\frac{x^2 - 2x}{2}\right) = -e^{-x}\left(\frac{x^2 - 4x + 2}{2}\right)$ per cui $g'''(0) = -1$, quindi la funzione presenta un flesso a tangente orizzontale in $(0,1)$. Inoltre essa presenta un flesso a tangente obliqua in $(2, 5e^{-2})$ con tangente obliqua di equazione $y = -2e^{-2}(x-2) + 5e^{-2} = e^{-2}(9-2x)$.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 4

Si calcoli $\int_0^2 g(x)dx$ e se ne dia l'interpretazione geometrica.

Poniamo $S = \int_0^2 \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x}dx$.

Integrando per parti $\int \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x}dx$ si ha:

$$\int \left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x}dx = -\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x} + \int (x+1)e^{-x}dx =$$

$$= -\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x} - (x+1)e^{-x} + \int e^{-x}dx = -\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right)e^{-x} - (x+1)e^{-x} - e^{-x} =$$

$$= -e^{-x}\left[\left(\frac{x^2 + 2x + 2}{2}\right) + (x+1) + 1\right] = -e^{-x}\left(\frac{x^2 + 4x + 6}{2}\right) + k \Rightarrow$$

$$S=\left[-e^{-x}\left(\frac{x^2+4x+6}{2}\right)\right]_0^2=3-9e^{-2}$$

e rappresenta l'area sottesa da $g(x)=\left(\frac{x^2+2x+2}{2}\right)e^{-x}$ nell'intervallo [0,2] i cui estremi sono le ascisse dei due flessi della curva.

PROBLEMA 2

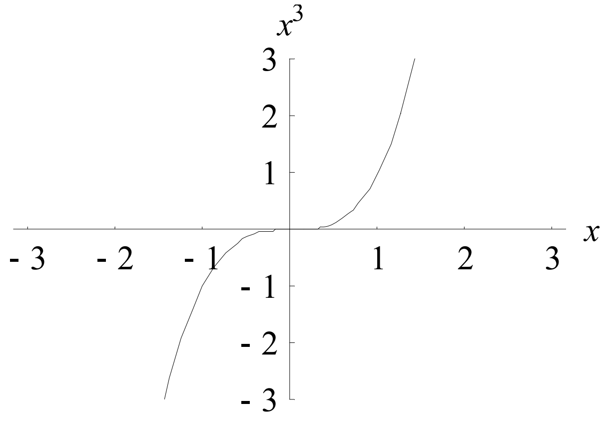
In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la funzione $f : R \to R$ definita da $f(x)=x^3+kx$, con k parametro reale.

Punto 1

Si dica come varia il grafico di f al variare di k (k positivo, negativo o nullo).

La funzione $f(x)=x^3+kx$ al variare di k ha come dominio R. Se $k=0$ essa diventa $f(x)=x^3$.

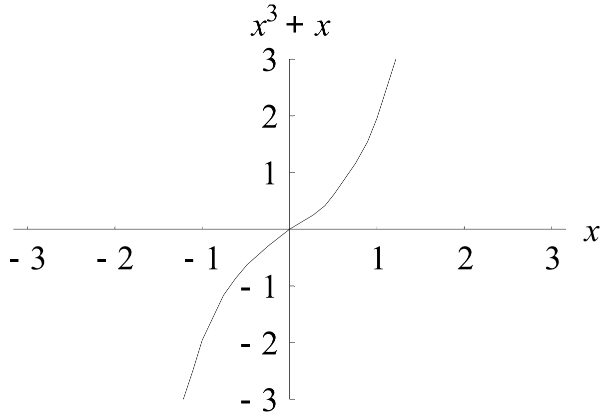
La cubica $f(x)=x^3$ è definita in R, interseca l'asse delle ascisse e delle ordinate nell'unico punto $(0,0)$, è positiva in $(0,+\infty)$, è strettamente crescente in tutto R e presenta un flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ di equazione $y=0$. Il grafico segue:



Studiamo ora i casi in cui k è positivo o negativo:

1. $k>0$;
2. $k<0$

Se $k>0$ la funzione diventa $y=x^3+kx=x(x^2+k)$ che come $y=x^3$ è definita in R, interseca l'asse delle ascisse e delle ordinate nell'unico punto $(0,0)$, è positiva in $(0,+\infty)$, è strettamente crescente in tutto R e presenta un flesso a tangente obliqua in $(0,0)$ di equazione $y=kx$. Quindi l'aggiunta di un termine kx per $k>0$ comporta che il flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ si tramuta in flesso a tangente obliqua di equazione $y=kx$. Di seguito il grafico per $k=1$:



Se $k < 0$ la funzione diventa $f(x) = x^3 + kx = x(x^2 + k)$. Tale funzione presenta tre intersezioni con l'asse delle ascisse nei punti $(0,0),(\sqrt{-k},0),(-\sqrt{-k},0)$ ed una sola con le ordinate in $(0,0)$, è positiva in $(-\sqrt{-k},0)\cup(\sqrt{-k},+\infty)$ e negativa in $(-\infty,-\sqrt{-k})\cup(0,\sqrt{-k})$, è strettamente crescente in $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)\cup\left(\sqrt{\frac{-k}{3}},+\infty\right)$ e strettamente decrescente in $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}},\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$, presenta un massimo relativo in $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}},-\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$ un minimo relativo in $\left(\sqrt{\frac{-k}{3}},\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$ e presenta un flesso a tangente obliqua in $(0,0)$ di equazione $y = kx$. Quindi l'aggiunta di un termine kx per $k < 0$ comporta che il flesso a tangente orizzontale in $(0,0)$ si tramuta in flesso a tangente obliqua di equazione $y = kx$, così come per $k > 0$, ed inoltre comporta che la funzione presenta due estremi relativi, un massimo relativo in $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}},-\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$ e un minimo relativo in $\left(\sqrt{\frac{-k}{3}},\frac{2k}{3}\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$, cioè la cubica non è più strettamente crescente in tutto R, caratteristica questa sia di $f(x) = x^3$ che di $f(x) = x^3 + kx$ con $k > 0$, ma presenta anche una stretta decrescenza in $\left(-\sqrt{\frac{-k}{3}},\sqrt{\frac{-k}{3}}\right)$. Di seguito il grafico per $k = -1$:

Punto 2

Sia $g(x) = x^3$ e γ il suo grafico. Si dimostri che γ e la retta d'equazione $y = 1 - x$ hanno un solo punto *P* in comune. Si determini l'ascissa di *P* approssimandola a meno di 0,1 con un metodo iterativo di calcolo.

Le intersezioni tra la cubica $g(x)=x^3$ e la retta $y=1-x$ corrispondono al sistema $\begin{cases} y=x^3 \\ y=1-x \end{cases}$ da cui si ricava l'equazione risolvente $x^3=1-x \rightarrow x^3+x-1=0$ che equivale a trovare gli zeri di $h(x)=x^3+x-1$. La funzione $h(x)=x^3+x-1$ è strettamente crescente in tutto R in quanto la sua derivata prima $h'(x)=3x^2+1$ è sempre positiva. Inoltre $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}<0, h(1)=1>0$ per cui la funzione per il teorema degli zeri ammette sicuramente uno zero in $\left(\frac{1}{2},1\right)$ e la stretta crescenza comporta che lo zero è unico. Per trovare lo zero ci avvaliamo del metodo delle tangenti di punto iniziale $x_0=1$ mediante formula ricorsiva $x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$. Sviluppando il metodo si ha:

1. $x_0=1$
2. $x_1=x_0-\frac{h(x_0)}{h'(x_0)}=x_0-\frac{x_0^3+x_0-1}{3x_0^2+1}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$
3. $x_2=x_1-\frac{h(x_1)}{h'(x_1)}=x_1-\frac{x_1^3+x_1-1}{3x_1^2+1}\cong 0.686$
4. $x_3=x_2-\frac{h(x_2)}{h'(x_2)}=x_2-\frac{x_2^3+x_2-1}{3x_2^2+1}\cong 0.682$

Poiché $|x_2-x_1|=0{,}064<0{,}1$ possiamo dire, che la soluzione cercata, con un errore inferiore a 0,1 è $\alpha\cong 0{,}69$. In realtà, effettuando anche il passo successivo dell'algoritmo di Newton-Raphson, si nota che $|x_3-x_2|=0{,}004<0{,}1$ per cui, con una precisione superiore a quella richiesta e in particolare con due cifre significative esatte, lo zero cercato è $\alpha\cong 0{,}68$.

Punto 3

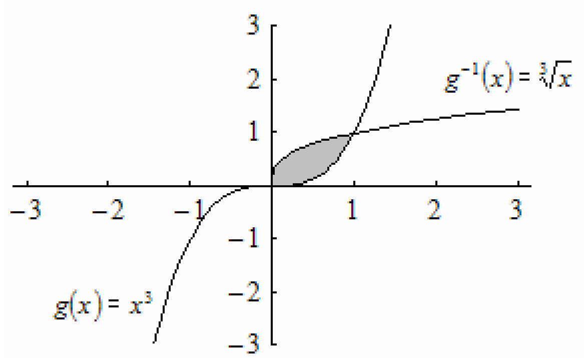
Sia D la regione finita del primo quadrante delimitata da γ e dal grafico della funzione inversa di g . Si calcoli l'area di D.

L'inversa di $g(x)=x^3$ è $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$. Le intersezioni tra la cubica $g(x)=x^3$ e $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ corrispondono al sistema $\begin{cases} y=x^3 \\ y=\sqrt[3]{x} \end{cases}$ da cui si ricava l'equazione risolvente

$$x^3=\sqrt[3]{x} \rightarrow x^9-x=x(x^8-1)=x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0 \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \\ x_3=-1 \end{array} \right.$$

. Nel primo quadrante le soluzioni che interessano sono $x_1=0, x_1=1$, che naturalmente sono in comune con la retta y=x.

L'area da calcolare è presentata nella figura seguente in grigio:



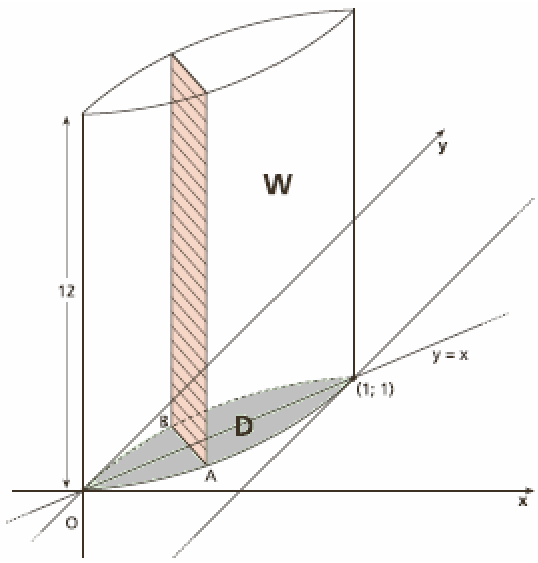
Tale area vale $S = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x^3\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Se vogliamo utilizzare la proprietà delle funzioni inverse (che hanno grafici simmetrici rispetto alla retta y=x), l'area precedente si può trovare come doppio dell'area compresa tra il grafico di y=x e il grafico di y=x^3: $S = 2 \cdot \int_0^1 \left(x - x^3\right)dx = 2 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

Punto 4

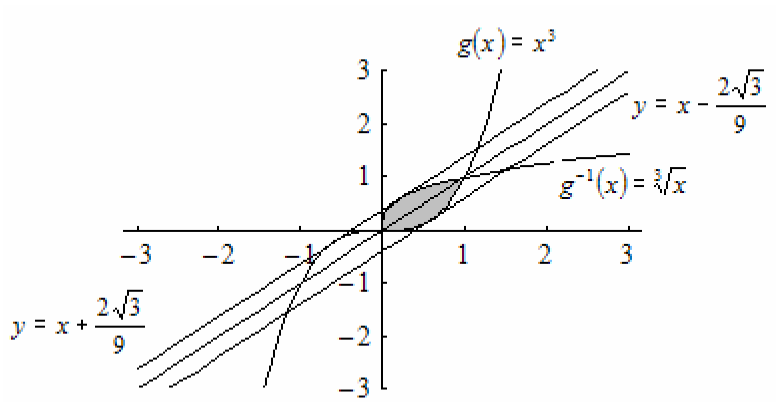
La regione D è la base di un solido W le cui sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante sono tutte rettangoli di altezza 12. Si determini la sezione di area massima. Si calcoli il volume di W.

Il solido W è un prisma retto di base D ed è di seguito presentato:



Tra le sezioni considerate quella di area massima è quella di base massima visto che l'altezza è costante e pari a 12. Tale base è il segmento AB che ha come estremi i punti delle curve che hanno ascissa compresa tra 0 e 1 e distanza massima dalla bisettrice del primo e terzo quadrante. La distanza massima è pari alla distanza tra i punti di tangenza che le rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante hanno con la cubica ed la sua inversa. La retta tangente alla cubica $g(x)=x^3$ in $P(x_0,y_0)$ ha coefficiente angolare $m=3x_0^2=1$ da cui ricaviamo $x_0=\frac{\sqrt{3}}{3}\to y_0=\frac{\sqrt{3}}{9}$ per cui la retta tangente avrà equazione $y=x-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ e punto di tangenza $A=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$.

Analogamente la retta tangente alla cubica $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ in $P(x_0,y_0)$ ha coefficiente angolare $m=\frac{1}{3}x_0^{-\frac{2}{3}}=1$ da cui ricaviamo $x_0=\frac{\sqrt{3}}{9}\to y_0=\frac{\sqrt{3}}{3}$ per cui la retta tangente avrà equazione $y=x+\frac{2\sqrt{3}}{9}$ e punto di tangenza $B=\left(\frac{\sqrt{3}}{9},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Il grafico seguente mostra le due curve con le rispettive tangenti:



La distanza massima vale allora $\overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\sqrt{2\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{9}$. Il volume del solido non è altro che un prisma per cui il volume è $V(W)=A_{Base}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot 12=6$.

Nel testo si parla di **sezioni con piani perpendicolari alla bisettrice del primo quadrante**, per cui le basi di tali sezioni sono segmenti appartenenti a rette di coefficiente angolare -1. Se prendiamo il generico punto P della cubica, $P(x,x^3)$, e Q la proiezione ortogonale di P sulla bisettrice, la base della sezione sarà il doppio della lunghezza del segmento PQ. Ma, essendo PQ parallelo alla bisettrice di II e IV quadrante, se mandiamo da P e da Q le parallele agli assi coordinati, viene a formarsi un quadrato di cui PQ è la diagonale: questo significa che la differenza tra le ascisse di P e di Q è, in valore assoluto, uguale alla differenza delle rispettive ordinate. Se chiamiamo *h* appunto questa differenza in valore assoluto, allora $\overline{PQ}=h\sqrt{2}$ e la lunghezza massima per la base dei rettangoli è $2h\sqrt{2}$. Data la convessità della funzione cubica nell'intervallo in questione [0, 1], rispetto alle coordinate di P, si ha $Q(x-h,x^3+h)$. Ma Q appartiene alla bisettrice del primo quadrante, per cui l'ascissa di Q e l'ordinata di Q sono uguali. Si ricava dunque $x-h=x^3+h$, da cui $2h = x - x^3$. La lunghezza da minimizzare è $2h\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot\left(x - x^3\right)$, che ha massimo quando ha massimo $2h = x - x^3$, cioè per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ (basta studiare il segno della derivata prima della funzione $2h$ ($D_x[2h]=1-3x^2$). La lunghezza cercata è

$2h\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{9}$ e le coordinate dei punti particolari P e Q per $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$ e $Q\left(\frac{2\sqrt{6}}{9},\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Sia $0 < a < b$ e $x \in [-b,b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b}|x-a|dx = a^2 + b^2$

Sfruttando la linearità dell'integrale e ricordando che

$|x-a| = (x-a)\cdot\mathrm{sgn}(x-a) = \begin{cases} x-a & \text{se } x \geq a \\ -x+a & \text{se } x < a \end{cases}$ si ha:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx = \int_{-b}^{a}(a-x)dx + \int_{a}^{b}(x-a)dx = \left[-\frac{(a-x)^2}{2}\right]_{-b}^{a} + \left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_{a}^{b} =$$

$$= \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab}{2} + \frac{a^2+b^2-2ab}{2} = a^2 + b^2$$

Quesito 2

Sono dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$ Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di *A* in *B*, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

Perché una relazione binaria da A a B sia una funzione è necessario e sufficiente che ad ogni elemento di A corrisponda uno ed un solo elemento di B.

Una funzione f : A → B si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A.

Una funzione f : A → B si dice iniettiva quando ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A.

Una funzione f : A → B si dice biiettiva quando è sia iniettiva che suriettiva, cioè quando ciascun elemento di B è immagine di esattamente un elemento di A.

Poiché A ha 4 elementi e B ha 3 elementi, cioè Card(A)>Card(B), non possono esistere funzioni iniettive da A a B, e quindi neppure biiettive.
Invece esistono funzioni suriettive da A a B: basta partizionare l'insieme A in 3 parti (e questo lo si può fare solo se uno dei tre sottoinsiemi che costituiscono la partizione ha 2 elementi e ciascuno degli altri due ha 1 elemento), e associare gli elementi in maniera tale che quelli appartenenti allo stesso sottoinsieme della partizione abbiano la stessa immagine.
Ad esempio, se scegliamo la seguente partizione di A: $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4\}$, possiamo definire una funzione $f: A \to B$ nel modo seguente: f(1)=f(2)=a, f(3)=b, f(4)=c, ma potevamo farlo anche in altro modo, precisamente in 3!=6 modi, permutando gli elementi dell'insieme B, lasciando però la condizione che f(1)=f(2). Questo significa che ci sono 6 funzioni suriettive per ogni partizione dell'insieme A in 3 parti. Per chi conosce i numeri di Stirling di seconda specie, il numero delle partizioni di un insieme di 4 elementi in tre parti è S(4,3)=6, da cui si deduce che tutte le possibili funzioni suriettive da A a B, distinte, sono in totale 36. Però, anche per chi non conoscesse i numeri di Stirling di seconda specie, è facile convincersi che le partizioni di A in tre parti sono proprio 6, basta elencarle, o anche più semplicemente osservando che ognuna di esse si può trovare individuando i due elementi da "abbinare", in modo che essi appartengano allo stesso sottoinsieme della partizione e gli altri due siano lasciati "da soli", quindi il numero richiesto non è altro che il numero di combinazioni $C_{(4,2)}$ cioè il numero dei sottoinsiemi di due elementi appartenenti ad un insieme di quattro elementi, cioè il coefficiente binomiale $\binom{4}{2} = 6$.

Ecco per esteso le sei partizioni dell'insieme A:
{1, 2 | 3 | 4}, {1, 3 | 2 | 4}, {1, 4 | 2 | 3}, {2, 3 | 1 | 4}, {2, 4 | 1 | 3}, {3, 4 | 1 | 2}.
Poiché non esistono funzioni iniettive, allora non esistono nemmeno funzioni biiettive.

Quesito 3

Una moneta da 2 euro (il suo diametro è 25,75 *mm*) viene lanciata su un pavimento ricoperto con mattonelle quadrate di lato 10 cm. Quale è la probabilità che la moneta vada a finire internamente ad una mattonella? (cioè non tagli i lati dei quadrati)

Perché la moneta vada a finire all'interno della mattonella, è necessario e sufficiente che il suo centro cada all'interno di un quadrato di lato pari alla lunghezza del lato quadrato della mattonella meno due volte il raggio della moneta, e quindi la probabilità è data dal rapporto tra l'area di questo quadrato e l'area della superficie della mattonella, dunque, trasformando i millimetri in centimetri:

$$p = \left[\frac{(10 - 2.575)^2}{10^2} \right] = \left(\frac{7.425}{10} \right)^2 = (0.7425.)^2 \cong 55\% .$$

Quesito 4

***"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.**

L'affermazione è falsa, nel senso che non esiste alcun poliedro regolare con facce esagonali. La motivazione sulla impossibilità è la seguente: perché un poliedro sia regolare le facce devono essere tutte congruenti fra loro e devono essere poligoni regolari. Naturalmente anche i diedri e gli angoloidi devono essere tutti congruenti tra loro. In particolare ci soffermiamo agli angoloidi: devono esistere almeno tre facce che confluiscono a ciascun vertice (e che costituiscono un triedro), ma perché l'angoloide sia ben definito la somma degli angoli delle facce che confluiscono allo stesso vertice deve essere minore di un angolo giro (a meno che il poliedro non sia concavo, ma in tal caso non potrà essere regolare). Un angolo di un esagono regolare misura 120°, e il triplo di tale misura è proprio 360°, cioè l'angolo giro. Per questo motivo non possono esistere poliedri regolari a facce esagonali ovvero a facce poligonali con più di sei lati.

Quesito 5

Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\quad \frac{0}{0};\quad \frac{1}{0};\quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

L'unica espressione a cui è attribuibile un valore numerico è $\frac{0}{1}=0$

Le altre espressioni hanno significato solo nella teoria dei limiti. Sono forme indeterminate, e possono assumere valori diversi a seconda del tipo di funzione. La seconda può assumere qualsiasi valore o può anche non esistere, la terza può assumere valore (sempre come limite) di + o – infinito, ma può anche non esistere, la quarta è spesso oggetto di discussione tra i matematici, ma anch'essa può assumere qualsiasi valore, anche se limitatamente al campo di definizione, dunque dovrebbe essere assunta come positiva.

Ricorrendo alla definizione di divisione come operazione inversa della moltiplicazione si ha:

$\frac{0}{1}=0$ perché $0\cdot 1=0$; $\frac{0}{0}$ non ha un valore definito, infatti per un qualsiasi numero k si ha $k\cdot 0=0$;

$\frac{1}{0}$ non ha un valore numerico perché nessun numero moltiplicato per 0 può dare 1.

Dal momento che abbiamo parlato di limiti, diamo alcuni esempi di funzione con relativi limiti che si presentano nelle forme date:

$$f(x)=\frac{x^2-x}{2x^2-3x+1},\quad g(x)=\frac{2x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x},\quad h(x)=\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2},\quad z(x)=0^x\,,$$

$$r(x)=x^x\,,\quad s(x)=\left[e^{-x}\right]^{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)},\quad t(x)=\left[\log\left(x^2+1\right)\right]^{\frac{1}{\log x}},\quad u(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}\right]^x.$$

Si ha $f(0)=0$, ma anche $\lim_{x\to 0} f(x)=\left[\frac{0}{1}\right]=0$, $\lim_{x\to 1} f(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(2x-1)(x-1)}=1$,

$\lim_{x\to 0} g(x)=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$, ma più precisamente il limite non esiste, perché $\lim_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$, mentre $\lim_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to -1} g(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x+1)}{x(x+1)^2}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty$, ma più precisamente il limite non esiste, perché $\lim_{x\to -1^+} g(x)=+\infty$, mentre $\lim_{x\to -1^-} g(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to 1} h(x)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}=\left[\frac{0}{3}\right]=0$, $\lim_{x\to 0} z(x)=0$, $\lim_{x\to 0^+} r(x)=1$,

$\lim_{x\to +\infty} s(x)=\frac{1}{e}$, $\lim_{x\to 0^+} t(x)=2$, $\lim_{x\to 0} u(x)$ non esiste, mentre esistono i due limiti destro e sinistro $\lim_{x\to 0^+} u(x)=0^+$ e $\lim_{x\to 0^-} u(x)=+\infty$.

Quesito 6

Con l'aiuto di una calcolatrice, si applichi il procedimento iterativo di Newton all'equazione $\sin x=0$, con punto iniziale $x_0=3$. Cosa si ottiene dopo due iterazioni?

La formula ricorsiva su cui si basa il metodo delle tangenti o di Newton è $x_{n+1}=x_n-\frac{h(x_n)}{h'(x_n)}$.

Sviluppando il metodo si ha:

1. $x_0=1$
2. $x_1=x_0-\frac{h(x_0)}{h'(x_0)}=x_0-\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=x_0-\tan x_0=3-\tan 3\cong 3.1425465431$
3. $x_2=x_1-\frac{h(x_1)}{h'(x_1)}=x_1-\tan x_1\cong 3.1415926533$
4. $x_3=x_2-\frac{h(x_2)}{h'(x_2)}=x_2-\tan x_2\cong 3.1415926535$

cioè otteniamo con la precisione di 9 cifre un'approssimazione di π.

Quesito 7

Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ **con** ***n*** **e** ***k*** **naturali e** ***n*** **>** ***k*****.**

Il primo membro dell'uguaglianza vale $\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$, dove n, $k+1$, $n-k-1$ sono numeri naturali: infatti per le ipotesi $n \geq k+1$. Verifichiamo che anche l'espressione a secondo membro si può scrivere nello stesso modo. Infatti, $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(k+1)}\cdot\frac{n-k}{(n-k)!}$.

Ora $k!\cdot(k+1)=(k+1)!$ mentre $\frac{n-k}{(n-k)!}=\frac{1}{(n-k-1)!}$ per cui $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$,

per cui l'uguaglianza è dimostrata.

Quesito 8

Alla festa di compleanno di Anna l'età media dei partecipanti è di 22 anni. Se l'età media uomini è 26 anni e quella delle donne è 19, qual è il rapporto tra il numero degli uomini e quello delle donne?

Indichiamo con

- N_X il numero degli uomini;
- N_Y il numero delle donne;
- S_X la somma delle età degli uomini;
- S_Y la somma delle età delle donne;
- M_X l'età media degli uomini (26 anni);
- M_Y l'età media delle donne (19 anni);
- M l'età media dei partecipanti (22 anni).

Si ha

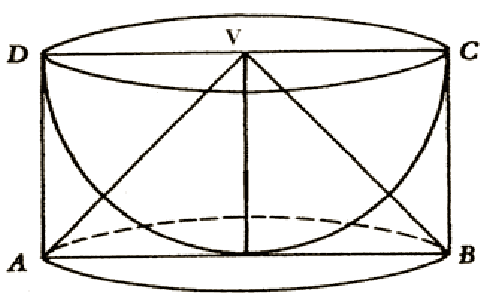
$M_X=\frac{S_X}{N_X}, M_Y=\frac{S_Y}{N_Y}, M=\frac{S_X+S_Y}{N_X+N_Y}$. Dalla terza uguaglianza, sfruttando le prime due, si ricava

$$M(N_X+N_Y)=S_X+S_Y=N_XM_X+N_YM_Y \rightarrow$$

$$\rightarrow 22(N_X+N_Y)=26N_X+19N_Y \rightarrow 4N_X=3N_Y \rightarrow \frac{N_X}{N_Y}=\frac{3}{4}.$$

Quesito 9

Nei “*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*”, Galileo Galilei descrive

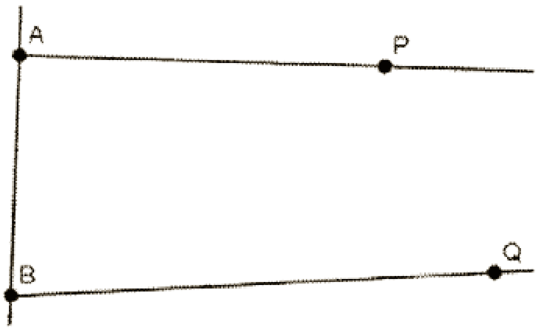


la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio *r* e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

Utilizziamo la figura del testo, e consideriamo le sezioni dei vari solidi con piani paralleli alle basi del cilindro: alla base di diametro AB, la circonferenza di diametro AB appartiene interamente sia al cono sia alla scodella, mentre la sezione piana che contiene la base del cilindro di diametro CD ha in comune il punto V con il cono e la circonferenza con la scodella, ed entrambe le figure piane hanno area nulla. Questo ci garantisce che il cono e la scodella sono ben posizionati come in figura. Dimostriamo, secondo Cavalieri, che ad una generica altezza, le sezioni con lo stesso piano (della scodella e del cono) sono equivalenti: chiamiamo R la misura del raggio del cilindro e della sfera. Chiamiamo O il centro del cerchio di diametro AB. Ad una certa altezza h, prendiamo il punto P, intersezione del piano sezione con il segmento VO, con PO di lunghezza h, e, considerando una sezione verticale della figura, chiamiamo Q l’intersezione con una generatrice del cono e T l’intersezione con un punto della sfera. In seguito utilizzeremo non h ma r=R-h.

La sezione del cono risulta essere un cerchio di raggio $r = \overline{PQ} = \overline{VP} = R - h$ mentre la sezione della scodella risulta essere una corona circolare di raggio maggiore R e di raggio minore $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$. L’area della sezione del cono è dunque πr^2 mentre l’area della sezione della scodella è $\pi R^2 - \pi r'^2 = \pi\left(R^2 - r'^2\right) = \pi r^2$.

Quesito 10



"*Se due punti P e Q del piano giacciono dalla stessa parte rispetto ad una retta AB e gli angoli* $P\hat{A}B$ *e* $O\hat{B}A$ *hanno somma minore di 180°, allora le semirette AP e BQ, prolungate adeguatamente al di là dei punti P e Q, si devono intersecare*". Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.

L'affermazione è una diretta conseguenza del quinto postulato di Euclide. Tentativi di dimostrazione di tale postulato attraverso i precedenti, per negare che anche tale proposizione fosse un assioma, sono andati a vuoto (ricordiamo in particolare quelli di Saccheri e Lambert). Dalla negazione di tale postulato sono nate le cosiddette "Geometrie non euclidee". Ricordiamo in particolare i fondatori di due di queste geometrie: Lobacevskij (geometria iperbolica) e Riemann (geometria ellittica).

Hanno collaborato
Nicola De Rosa
Angela D'Amato