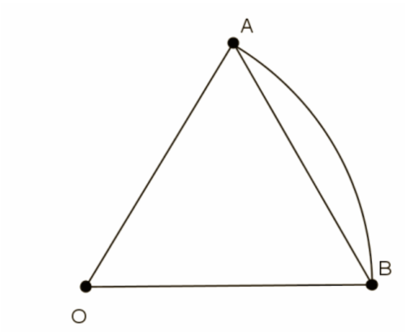
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO 2009

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

E' assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).



1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x)$ con $x \in [0, 2\pi]$
2. Si studi come varia S(x) e se ne disegni il grafico (avendo posto r = 1).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).
4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x) = \log x$ (*logaritmo naturale*).

1. Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse *y* della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse *y* della parallela per *P* all'asse *x* . Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x) = \log_a x$ con *a* reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse *x* della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base *a* è δ = 45°? E per quale valore di *a* è δ = 135°?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y = 1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta di equazione $x = -1$.

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).

2. Sono dati gli insiemi $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{a,b,c\}$ Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.

5. Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1};\quad \frac{0}{0};\quad \frac{1}{0};\quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

6. Si calcoli: $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

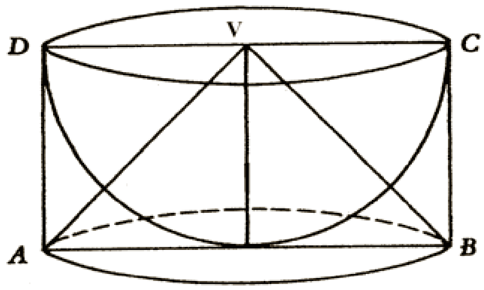
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.

8. Si provi che l'equazione:

$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$

ha una sola radice compresa fra –1 e 0.

9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$

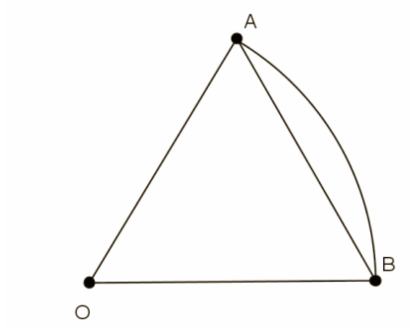
Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

PROBLEMA 1

E' assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in metri e radianti).

Punto 1

Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$ **con** $x\in[0,2\pi]$



Indichiamo con:

1. $S(\mathrm{A\hat{O}B})$ l'area del settore circolare $\mathrm{A\hat{O}B}$ di raggio r ed ampiezza x;
2. $S(\mathrm{AOB})$ l'area del triangolo isoscele AOB di lati $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OB}}=r$ ed angolo tra essi x

Differenziamo i casi in cui l'ampiezza del settore circolare x è un angolo concavo o convesso.

a. Angolo x convesso $(0\le x\le\pi)$: in tal caso l'area $S(x)=S(\mathrm{A\hat{O}B})-S(\mathrm{AOB})$;

b. Angolo x concavo $(\pi\le x\le 2\pi)$: in tal caso l'area $S(x)=S(\mathrm{A\hat{O}B})+S(\mathrm{AOB})$.

L'area di un settore circolare di raggio r ed ampiezza x è $S(\mathrm{A\hat{O}B})=\frac{r^2\cdot x}{2}$, mentre l'area del triangolo AOB, conoscendo due lati e l'angolo compreso, è pari a

$$S(\mathrm{AOB})=\begin{cases}\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2} & \text{se } 0\le x\le\pi\\ \dfrac{r^2\cdot\sin(2\pi-x)}{2}=-\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2} & \text{se } \pi\le x\le 2\pi\end{cases}.$$

Quindi

$$S(x)=\begin{cases}S(\mathrm{A\hat{O}B})-S(\mathrm{AOB}) & \text{se } 0\le x\le\pi\\ S(\mathrm{A\hat{O}B})+S(\mathrm{AOB}) & \text{se } \pi\le x\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow S(x)=\begin{cases}\dfrac{r^2\cdot x}{2}-\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2} & \text{se } 0\le x\le\pi\\ \dfrac{r^2\cdot x}{2}+\left(-\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2}\right) & \text{se } \pi\le x\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(x)=\begin{cases}\dfrac{r^2\cdot x}{2}-\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2} & \text{se } 0\le x\le\pi\\ \dfrac{r^2\cdot x}{2}-\dfrac{r^2\cdot\sin(x)}{2} & \text{se } \pi\le x\le 2\pi\end{cases}\Rightarrow S(x)=\frac{r^2\cdot x}{2}-\frac{r^2\cdot\sin(x)}{2}=\frac{1}{2}r^2(x-\sin x)$$

con $x\in[0,2\pi]$.

Punto 2

Si studi come varia S(x) e se ne disegni il grafico (avendo posto r = 1).

La funzione da studiare è $S(x)=\frac{1}{2}(x-\sin x)$ in $x\in[0,2\pi]$.

Dominio: $[0,2\pi]$

Intersezione asse delle ascisse: l'equazione $x-\sin(x)=0$ ha un'unica soluzione $x=0$. Infatti la funzione $S(x)=\frac{1}{2}[x-\sin(x)]$ è strettamente crescente in $(0,2\pi)$ in quanto la sua derivata è $S'(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(x)]$.

Intersezione asse delle ordinate: $(0,0)$

Positività: la funzione è positiva in tutto il dominio in quanto la funzione è strettamente crescente e $S(0)=0, S(2\pi)=\pi>0$; in altro modo la bisettrice del primo e terzo quadrante di equazione $y=x$ sta sempre al di sopra della funzione $y=\sin x$,

Asintoti verticali: non esistono visto il dominio della funzione

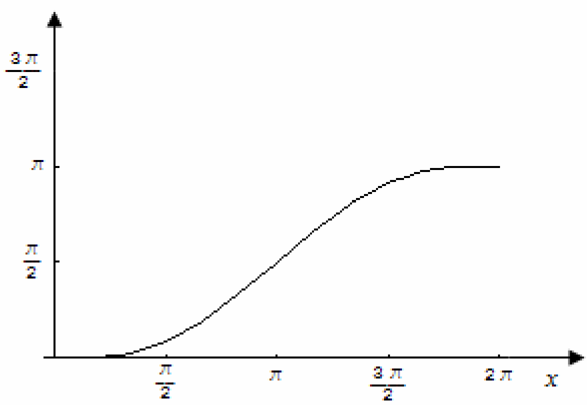
Asintoti orizzontale: non ha senso calcolarli in quanto il dominio di studio è limitato

Asintoti obliqui: non ha senso calcolarli in quanto il dominio di studio è limitato

Crescenza e decrescenza: $S'(x)=\frac{1}{2}[1-\cos(x)]$ per cui la funzione è strettamente crescente in $(0,2\pi)$ e si annulla in $x=0, x=2\pi$. Inoltre $(0,0)$ è un minimo assoluto e $(2\pi,\pi)$ è un massimo assoluto.

Flessi: $S''(x)=\frac{\sin(x)}{2}$ per cui in $(0,\pi)$ la funzione volge la concavità verso l'alto e in $(\pi,2\pi)$ verso il basso per cui $\left(\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ è flesso a tangente obliqua.

Il grafico è sotto presentato:



Punto 3

Si fissi l'area del settore AOB pari a 100 m^2. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

L'area del settore $\mathrm{A\hat{O}B}$ è $S\left(\mathrm{A\hat{O}B}\right)=\frac{r^2 \cdot x}{2}$ per cui imponendo $S\left(\mathrm{A\hat{O}B}\right)=\frac{r^2 \cdot x}{2}=100$ si ricava $x=\frac{200}{r^2}$. Il perimetro del settore $\mathrm{A\hat{O}B}$ è $2p(r)=2r+rx=2r+\frac{200}{r}$. Poiché $x \in [0,2\pi]$ si ha che $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$. Cercheremo il perimetro minimo mediante lo studio della derivata. La derivata prima di $2p(r)=2r+\frac{200}{r}$ è $2p'(r)=2-\frac{200}{r^2}$ che è strettamente decrescente in $\left[\frac{10}{\sqrt{\pi}},10\right[$ e strettamente crescente in $(10,+\infty)$. Inoltre la derivata seconda è $2p''(r)=\frac{400}{r^3}$ e $2p''(10)=\frac{2}{5}>0$ per cui si ha il perimetro minimo per $r=10$. Alternativamente il perimetro $2p(r)=2r+\frac{200}{r}$ è espresso come somma di due numeri positivi a prodotto costante $\left(2r \cdot \frac{200}{r}=400\right)$ per cui esso è minimo quando i due addendi coincidono e quindi quando $2r=\frac{200}{r}$ da cui $r=\pm 10$, scartando la soluzione negativa si ritrova che il perimetro è minimo per $r=10$.

In corrispondenza si ha $x=\frac{200}{100}=2[rad]$ da cui $x°=\frac{180° \cdot x[rad]}{\pi[rad]}=\frac{360°}{\pi} \cong 115°$.

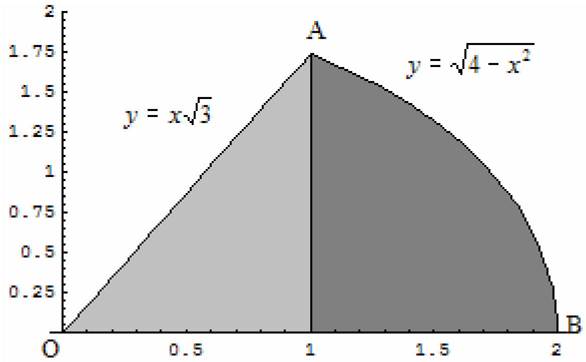
Punto 4

Sia $r=2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

Rappresentiamo il settore circolare in un sistema di riferimento con origine coincidente con O e raggio OB sull'asse delle ascisse. In questo caso la retta OA ha equazione $y=x \cdot \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=x\sqrt{3}$ per $x \in [0,1]$; l'arco di settore circolare sarà rappresentato da $y=\sqrt{4-x^2}$ per $x \in [1,2]$. In questo modo il lato del quadrato sezione è $L(x)=\begin{cases} x\sqrt{3} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ cui corrisponde l'area del quadrato

$A(x)=L^2(x)=\begin{cases}3x^2 & \text{se } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{se } 1\le x\le 2\end{cases}$. Il volume sarà allora pari alla somma dei due volumetti componenti e cioè

$$V=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx=\left[x^3\right]_0^1+\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=1+\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right]=5-\frac{7}{3}=\frac{8}{3}$$



PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x)=\log x$ (*logaritmo naturale*)

Punto 1

Sia *A* il punto d'intersezione con l'asse *y* della tangente a G_f in un suo punto *P*. Sia *B* il punto d'intersezione con l'asse *y* della parallela per *P* all'asse *x* . Si dimostri che, qualsiasi sia *P*, il

segmento *AB* ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x)=\log_a x$ con *a* reale positivo diverso da 1?

Un generico punto P appartenente alla curva di equazione $f(x)=\log x$ ha coordinate $P(t,\ln t)$. La tangente a $f(x)$ in $P(t,\ln t)$ ha equazione $y=m(x-t)+\ln t$ con $m=f'(t)=\frac{1}{t}$ per cui l'equazione della tangente è $y=\frac{1}{t}(x-t)+\ln t$. Di conseguenza le coordinate di A sono $A(0,\ln t-1)$ mentre le coordinate di B sono $B(0,\ln t)$. Il segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ ha lunghezza $\overline{\mathrm{AB}}=|\ln t-(\ln t-1)|=1$ ed è costante al variare di $P(t,\ln t)$.

Se $g(x)=\log_a x$ il punto P ha coordinate $P\left(t,\frac{\ln t}{\ln a}\right)$ e la tangente è $y=m(x-t)+\frac{\ln t}{\ln a}$ con $m=g'(t)=\frac{1}{\ln a\cdot t}$ da cui $y=\frac{1}{\ln a\cdot t}(x-t)+\frac{\ln t}{\ln a}$. Quindi i punti A e B avranno coordinate $A\left(0,\frac{\ln t-1}{\ln a}\right),B\left(0,\frac{\ln t}{\ln a}\right)$ per cui $\overline{\mathrm{AB}}=\left|\frac{\ln t}{\ln a}-\frac{(\ln t-1)}{\ln a}\right|=\frac{1}{|\ln a|}$: anche in tal caso al variare di $a>0\wedge a\neq 1$ il segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ ha lunghezza costante che dipende da a.

Punto 2

Sia δ l'inclinazione sull'asse *x* della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base *a* è δ = 45°? E per quale valore di *a* è δ = 135°?

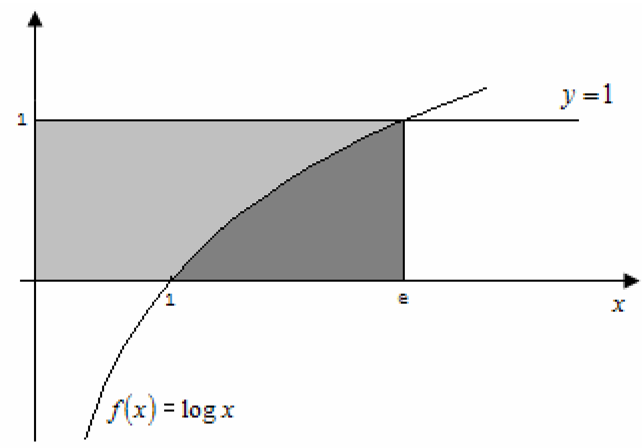
La retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1 ha equazione $y=\frac{(x-1)}{\ln a}$ per cui il coefficiente angolare è $m=\frac{1}{\ln a}$. Il valore di $a>0\wedge a\neq 1$ per cui la retta tangente ha inclinazione δ = 45° si ricava imponendo che il coefficiente angolare $m=\frac{1}{\ln a}$ sia pari a $\tan(45°)=1$ e cioè $\ln a=1\Rightarrow a=e$.

Il valore di $a>0\wedge a\neq 1$ per cui la retta tangente ha inclinazione δ = 135° si ricava imponendo che il coefficiente angolare $m=\frac{1}{\ln a}$ sia pari a $\tan(135°)=-1$ e cioè $\ln a=-1\Rightarrow a=\frac{1}{e}$.

Punto 3

Sia D la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y=1$. Si calcoli l'area di D.

La retta di equazione $y=1$ interseca la curva logaritmica $f(x)=\log x$ in $(e,1)$. L'area da calcolare è rappresentata in grigio chiaro nella figura seguente:



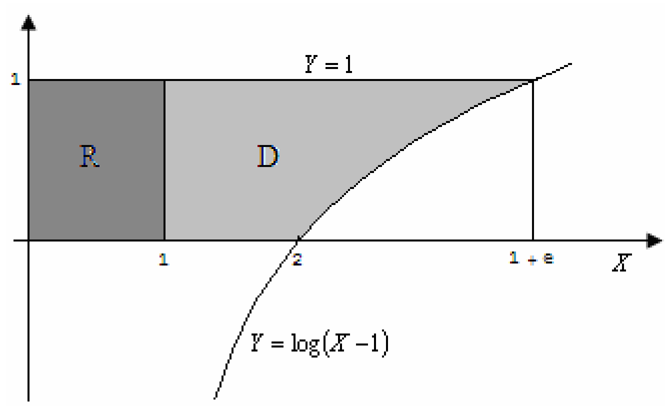
Tale area è calcolabile come differenza tra l'area del rettangolo di altezza unitaria e base e e l'area in grigio scuro sottesa dalla curva logaritmica in $[1,e]$. Cioè $S=e\cdot 1-\int_1^e \ln x dx$. Attraverso l'integrazione per parti si ha $S=e-[x(\ln x-1)]_1^e=e-[(0)-(-1)]=e-1$.

Alternativamente si puo calcolare l'area richiesta utilizzando l'inversa della $f(x)=\log x$ e cioè $g(y)=e^y$, per cui $S=\int_0^1 e^y dy=[e^y]_0^1=e-1$.

Punto 4

Si calcoli il volume del solido generato da D nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x=-1$.

Effettuiamo innanzitutto una traslazione di vettore $\vec{v}(1,0)$, cioè una trasformazione $\begin{cases} X=x+1 \\ Y=y \end{cases}$, in modo da portare la retta di equazione $x=-1$ in $X=0$. Il tal modo nel nuovo sistema di riferimento (X,Y) la curva logaritmica avrà equazione $Y=\log(X-1)$. Di conseguenza la regione D diventa la seguente:



Il volume che scaturisce dalla rotazione della regione D intorno all'asse delle ordinate di equazione $X=0$ è data dalla rotazione di $\mathrm{D}\cup\mathrm{R}$ cui va sottratto il volume dovuto alla rotazione del rettangolo R. La rotazione del rettangolo R produce un cilindro di altezza e raggio di base unitario cui corrisponde un volume pari a π. La funzione $Y=\log(X-1)$ ha come inversa la funzione $X=e^Y+1$ per cui il volume ottenuto ruotando la regione di piano $\mathrm{D}\cup\mathrm{R}$ intorno all'asse delle ordinate è $V(\mathrm{D}\cup\mathrm{R})=\pi\int_0^1 \left(e^Y+1\right)^2 dY=\pi\int_0^1\left(e^{2Y}+2e^Y+1\right)dY=\pi\left[\frac{e^{2Y}}{2}+2e^Y+Y\right]_0^1=\pi\left[\frac{e^2+4e-3}{2}\right]$

per cui $V(\mathrm{D})=V(\mathrm{D}\cup\mathrm{R})-V(\mathrm{R})=\pi\left[\frac{e^2+4e-3}{2}\right]-\pi=\pi\left[\frac{e^2+4e-5}{2}\right]$.

QUESTIONARIO

Quesito 1

Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\sin x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).

La funzione $f(x)$ è la primitiva di $\sin x$ passante per (0,2). In particolare $f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+c$ ed imponendo il passaggio per (0,2) si ricava $c=3$ da cui $f(x)=3-\cos x$

Quesito 2

Sono dati gli insiemi $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$ Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di *A* in *B*, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?

Perché una relazione binaria da A a B sia una funzione è necessario e sufficiente che ad ogni elemento di A corrisponda uno ed un solo elemento di B.

Una funzione f : A → B si dice suriettiva quando ogni elemento del codominio B è immagine di almeno un elemento di A.

Una funzione f : A → B si dice iniettiva quando ogni elemento di B è immagine al più di un elemento di A.

Una funzione f : A → B si dice biiettiva quando è sia iniettiva che suriettiva, cioè quando ciascun elemento di B è immagine di esattamente un elemento di A.

Poiché A ha 4 elementi e B ha 3 elementi, cioè Card(A)>Card(B), non possono esistere funzioni iniettive da A a B, e quindi neppure biiettive.

Invece esistono funzioni suriettive da A a B: basta partizionare l'insieme A in 3 parti (e questo lo si può fare solo se uno dei tre sottoinsiemi che costituiscono la partizione ha 2 elementi e ciascuno

degli altri due ha 1 elemento), e associare gli elementi in maniera tale che quelli appartenenti allo stesso sottoinsieme della partizione abbiano la stessa immagine.
Ad esempio, se scegliamo la seguente partizione di A: $A_1=\{1,2\}$, $A_2=\{3\}$, $A_3=\{4\}$, possiamo definire una funzione $f: A \to B$ nel modo seguente: f(1)=f(2)=a, f(3)=b, f(4)=c, ma potevamo farlo anche in altro modo, precisamente in 3!=6 modi, permutando gli elementi dell'insieme B, lasciando però la condizione che f(1)=f(2). Questo significa che ci sono 6 funzioni suriettive per ogni partizione dell'insieme A in 3 parti. Per chi conosce i numeri di Stirling di seconda specie, il numero delle partizioni di un insieme di 4 elementi in tre parti è S(4,3)=6, da cui si deduce che tutte le possibili funzioni suriettive da A a B, distinte, sono in totale 36. Però, anche per chi non conoscesse i numeri di Stirling di seconda specie, è facile convincersi che le partizioni di A in tre parti sono proprio 6, basta elencarle, o anche più semplicemente osservando che ognuna di esse si può trovare individuando i due elementi da "abbinare", in modo che essi appartengano allo stesso sottoinsieme della partizione e gli altri due siano lasciati "da soli", quindi il numero richiesto non è altro che il numero di combinazioni $C_{(4,2)}$ cioè il numero dei sottoinsiemi di due elementi appartenenti ad un insieme di quattro elementi, cioè il coefficiente binomiale $\binom{4}{2}=6$.

Ecco per esteso le sei partizioni dell'insieme A:
{1, 2 | 3 | 4}, {1, 3 | 2 | 4}, {1, 4 | 2 | 3}, {2, 3 | 1 | 4}, {2, 4 | 1 | 3}, {3, 4 | 1 | 2}.
Poiché non esistono funzioni iniettive, allora non esistono nemmeno funzioni biiettive.

Quesito 3

Per quale o quali valori di *k* la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?

I punti a tangente orizzontale sono i cosiddetti punti stazionari cioè i punti che annullano la derivata prima. La derivata prima della cubica $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ è $y' = 3x^2 + 2kx + 3$ e tale equazione ha un'unica soluzione se il suo delta si annulla e cioè se $\frac{\Delta}{4} = k^2 - 9 = 0$ da cui $k = \pm 3$. Le due cubiche corrispondenti saranno $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ e $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$; in particolare $y = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$ presenterà un flesso a tangente orizzontale in $(-1,-5)$ mentre $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ presenterà un flesso a tangente orizzontale in $(1,-3)$.

Quesito 4

***"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.**

L'affermazione è falsa, nel senso che non esiste alcun poliedro regolare con facce esagonali. La motivazione sulla impossibilità è la seguente: affinché un poliedro sia regolare le facce devono essere tutte congruenti fra loro e devono essere poligoni regolari. Naturalmente anche i diedri e gli angoloidi devono essere tutti congruenti tra loro. In particolare: devono esistere almeno tre facce che confluiscono in ciascun vertice (e che costituiscono un triedro), ma affinché l'angoloide sia ben definito la somma degli angoli delle facce che confluiscono nello stesso vertice deve essere minore di un angolo giro (a meno che il poliedro non sia concavo, ma in tal caso non potrà essere regolare). Un angolo di un esagono regolare misura 120°, e il triplo di tale misura è proprio 360°, cioè l'angolo giro. Per questo motivo non possono esistere poliedri regolari a facce esagonali ovvero a facce poligonali con più di sei lati.

Quesito 5

Si considerino le seguenti espressioni:

$$\frac{0}{1}; \quad \frac{0}{0}; \quad \frac{1}{0}; \quad 0^0$$

A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.

L'unica espressione a cui è attribuibile un valore numerico è $\frac{0}{1} = 0$

Le altre espressioni hanno significato solo nella teoria dei limiti. Sono forme indeterminate, e possono assumere valori diversi a seconda del tipo di funzione. La seconda può assumere qualsiasi valore o può anche non esistere, la terza può assumere valore (sempre come limite) di + o – infinito, ma può anche non esistere, la quarta è spesso oggetto di discussione tra i matematici, ma anch'essa può assumere qualsiasi valore, anche se limitatamente al campo di definizione, dunque dovrebbe essere assunta come positiva.

Riccorrendo alla definizione di divisione come operazione inversa della moltiplicazione si ha:

$\frac{0}{1} = 0$ perché $0 \cdot 1 = 0$; $\frac{0}{0}$ non ha un valore definito, infatti per un qualsiasi numero k si ha $k \cdot 0 = 0$;

$\frac{1}{0}$ non ha un valore numerico perché nessun numero moltiplicato per 0 può dare 1.

Dal momento che abbiamo parlato di limiti, diamo alcuni esempi di funzione con relativi limiti che si presentano nelle forme date:

$f(x)=\dfrac{x^2-x}{2x^2-3x+1}$, $\quad g(x)=\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+2x^2+x}$, $\quad h(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$, $\quad z(x)=0^x$,

$r(x)=x^x$, $\quad s(x)=\left[e^{-x}\right]^{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, $\quad t(x)=\left[\log\left(x^2+1\right)\right]^{\frac{1}{\log x}}$, $\quad u(x)=\left[e^{-\frac{1}{x^2}}\right]^x$.

Si ha $f(0)=0$, ma anche $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left[\dfrac{0}{1}\right]=0$, $\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{(2x-1)(x-1)}=1$,

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$, ma più precisamente il limite non esiste, perché $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=+\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=-\infty$, $\quad \lim\limits_{x\to -1} g(x)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+1)(x+1)}{x(x+1)^2}=\left[\dfrac{1}{0}\right]=\infty$, ma più precisamente il limite non esiste, perché $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=+\infty$, mentre $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to 1} h(x)=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{(x-1)(x+2)}=\left[\dfrac{0}{3}\right]=0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} z(x)=0$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} r(x)=1$,

$\lim\limits_{x\to +\infty} s(x)=\dfrac{1}{e}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0^+} t(x)=2$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} u(x)$ non esiste, mentre esistono i due limiti destro e sinistro $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=0^+$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} u(x)=+\infty$.

Quesito 6

Si calcoli: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

Il limite richiesto si può calcolare nel seguente modo

$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}$. Osserviamo che siamo in un interno di $-\infty$, per cui ricordando che

$|x|=x\cdot\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} x & \text{se } x\ge 0 \\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$, il limite richiesto è dato da $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=-1$

Quesito 7

Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1}=\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ **con *n* e *k* naturali e *n* > *k*.**

Il primo membro dell'uguaglianza vale $\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$, dove n, $k+1$, $n-k-1$ sono numeri naturali: infatti per le ipotesi $n \geq k+1$. Verifichiamo che anche l'espressione a secondo membro si può scrivere nello stesso modo. Infatti, $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(k+1)}\cdot\frac{n-k}{(n-k)!}$.

Ora $k!\cdot(k+1)=(k+1)!$ mentre $\frac{n-k}{(n-k)!}=\frac{1}{(n-k-1)!}$ per cui $\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}=\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$,

per cui l'uguaglianza è dimostrata.

Quesito 8

Si provi che l'equazione:

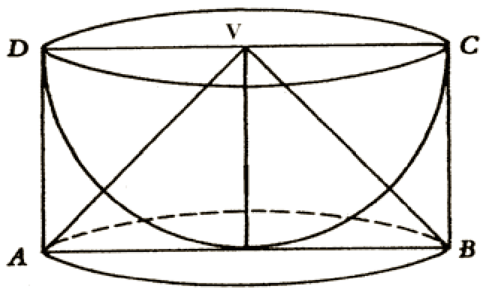
$$x^{2009}+2009x+1=0$$

ha una sola radice compresa fra –1 e 0.

La funzione $f(x)=x^{2009}+2009x+1$ è un polinomio di grado dispari, che ha quindi almeno una soluzione reale. Dunque possiamo dimostrare facilmente, attraverso lo studio del segno della derivata prima $f'(x)=2009x^{2008}+2009$, che essa è strettamente crescente, e dunque iniettiva, per cui l'equazione data ha un'unica soluzione reale. Si osserva poi che $f(-1)=-2009<0, f(0)=1>0$ per cui per il teorema degli zeri la funzione presenta un unico zero in $(-1,0)$.

Quesito 9

Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio *r* e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.



Utilizziamo la figura del testo, e consideriamo le sezioni dei vari solidi con piani paralleli alle basi del cilindro: alla base di diametro AB, la circonferenza di diametro AB appartiene interamente sia al cono sia alla scodella, mentre la sezione piana che contiene la base del cilindro di diametro CD ha in comune il punto V con il cono e la circonferenza con la scodella, ed entrambe le figure piane hanno area nulla. Questo ci garantisce che il cono e la scodella sono ben posizionati come in figura. Dimostriamo, secondo Cavalieri, che ad una generica altezza, le sezioni con lo stesso piano (della scodella e del cono) sono equivalenti: chiamiamo R la misura del raggio del cilindro e della sfera. Chiamiamo O il centro del cerchio di diametro AB. Ad una certa altezza h, prendiamo il punto P, intersezione del piano sezione con il segmento VO, con PO di lunghezza h, e, considerando una sezione verticale della figura, chiamiamo Q l'intersezione con una generatrice del cono e T l'intersezione con un punto della sfera. In seguito utilizzeremo non h ma r=R-h.

La sezione del cono risulta essere un cerchio di raggio $r = \overline{PQ} = \overline{VP} = R - h$ mentre la sezione della scodella risulta essere una corona circolare di raggio maggiore R e di raggio minore $r' = \sqrt{R^2 - r^2}$. L'area della sezione del cono è dunque πr^2 mentre l'area della sezione della scodella è $\pi R^2 - \pi r'^2 = \pi\left(R^2 - r'^2\right) = \pi r^2$.

Quesito 10

Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$

Una funzione è periodica di periodo T se $f(x) = f(x + kT)$ con $k \in Z$. Nel caso in esame, ricordando che il coseno è periodico di 2π , deve aversi $\cos(5x) = \cos(5x + 2h\pi) = \cos(5x + 5kT)$ e cioè $5x + 2h\pi = 5x + 5kT$. Per $h = k$ si ricava $T = \frac{2\pi}{5}$.

Hanno collaborato
Nicola De Rosa
Luca Lussardi
Angela D'Amato
Antonio Bernardo