

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

■ **PROBLEMA 1**

Sia  $f$  la funzione definita da:  $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico  $G$  di  $f$ .
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta  $y = c$  che interseca  $G$  in due punti distinti e le regioni finite di piano  $R$  e  $S$  che essa delimita con  $G$ . Precisamente:  $R$  delimitata dall'asse  $y$ , da  $G$  e dalla retta  $y = c$  e  $S$  delimitata da  $G$  e dalla retta  $y = c$ .
3. Determinate  $c$  in modo che  $R$  e  $S$  siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di  $G$  con la retta  $y = c$ .
4. Determinate la funzione  $g$  il cui grafico è simmetrico di  $G$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ .

■ **PROBLEMA 2**

$ABC$  è un triangolo rettangolo di ipotenusa  $BC$ .

1. Dimostrate che la mediana relativa a  $BC$  è congruente alla metà di  $BC$ .
2. Esprimete le misure dei cateti di  $ABC$  in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con  $BC = \sqrt{3}$  metri, determinate il cono  $K$  di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in litri di  $K$ .
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$ .

## ■ QUESTIONARIO

- 1 Trovate due numeri reali  $a$  e  $b$ ,  $a \neq b$ , che hanno somma e prodotto uguali.
- 2 Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.
- 3 Date un esempio di funzione  $f(x)$  con un massimo relativo in  $(1, 3)$  e un minimo relativo in  $(-1, 2)$ .
- 4 Dimostrate che l'equazione  $e^x + 3x = 0$  ammette una e una sola soluzione reale.
- 5 Di una funzione  $g(x)$ , non costante, si sa che:  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 3$  e  $g(2) = 4$ . Trovate una espressione di  $g(x)$ .
- 6 Verificate che le due funzioni  $f(x) = 3 \log x$  e  $g(x) = \log(2x)^3$  hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?
- 7 Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente  $a$ ,  $b$  e  $\gamma$ . Quale è il valore di  $\gamma$  che massimizza l'area del triangolo?
- 8 La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radiani*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?
- 9 Calcolate:  $\int_0^1 \arcsen x \, dx$ .
- 10 Considerate gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ; quante sono le applicazioni (le funzioni) di  $A$  in  $B$ ?

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

### PROBLEMA 1

1) Il dominio della funzione  $f$ , come tutte le funzioni polinomiali, è l'intero asse reale;  $f$  è continua e derivabile e, poiché è somma di soli termini con esponenti dispari, si ha che  $f(-x) = -f(x)$ , ovvero  $f$  è simmetrica rispetto all'origine degli assi.

Poiché  $f$  non presenta punti di discontinuità gli unici limiti che ha senso considerare sono quelli per  $x$  che tende a  $+\infty$  e  $-\infty$ .

Come per tutte le parabole cubiche il risultato di tali limiti non può che essere  $\infty$ , di cui si deve determinare il segno; esso dipende dal segno del termine di grado massimo che in questo caso vale  $-3$ ; pertanto c'è un'inversione del segno dell'infinito a cui tende la  $x$  con quello a cui tende la funzione; ovvero:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

La  $f$  interseca l'asse delle ascisse in  $x = 0$ , come tutte le funzioni simmetriche rispetto all'origine, e

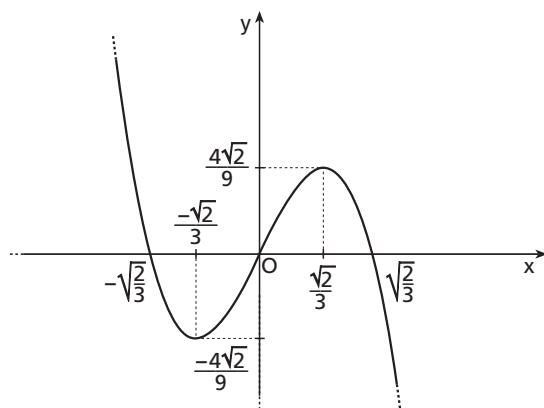
in  $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$  e risulta positiva per  $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$  o  $0 < x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

La derivata prima,  $f'(x) = 2 - 9x^2$ , è positiva per  $-\frac{\sqrt{2}}{3} < x < \frac{\sqrt{2}}{3}$  e pertanto la  $f$  è crescente in

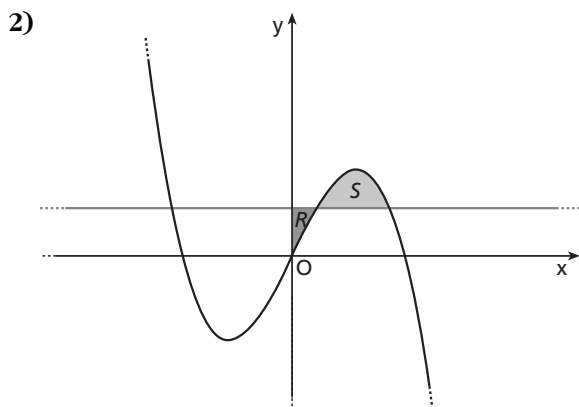
tale intervallo con un minimo relativo in  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$  e un massimo relativo in  $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{2}}{9}\right)$ .

La derivata seconda  $f''(x) = -18x$  è positiva per ogni  $x < 0$  e pertanto la  $f$  ha la concavità verso l'alto in tale intervallo, con un punto di flesso nell'origine; per un disegno accurato del grafico di  $f$  è utile calcolare l'inclinazione della tangente nel punto di flesso sostituendo l'ascissa del punto di flesso nella  $f'(x)$ ; si ottiene così  $f'(0) = 2$ .

Con queste informazioni è possibile disegnare il grafico di  $f$  (figura 1).



◀ Figura 1.



◀ Figura 2.

- 3) Siano  $x_1$  e  $x_2$  le ascisse dei punti di intersezione della  $f(x)$  con la retta  $y = c$ ; tali valori sono due delle soluzioni dell'equazione  $2x - 3x^3 = c$  quando  $c$  è compresa tra 0 e la  $y$  del punto di massimo relativo; poiché questa equazione letterale di terzo grado non è risolvibile per via algebrica occorre determinare  $x_1$ ,  $x_2$  e  $c$  ponendo a sistema le informazioni note, ovvero che  $f(x_1) = c$ ,  $f(x_2) = c$ , e che l'area  $R$ , l'integrale della differenza tra la retta e la  $f(x)$  calcolato tra 0 e  $x_1$ , è uguale all'area  $S$ , l'integrale della differenza tra la  $f(x)$  e la retta calcolato tra  $x_1$  e  $x_2$ , e cioè:

$$\int_0^{x_1} (c - 2x + 3x^3) dx = \int_{x_1}^{x_2} (2x - 3x^3 - c) dx$$

Dopo semplici passaggi si arriva all'equazione:  $x_2 \cdot \left(x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c\right) = 0$  da cui, uguagliando il secondo fattore a zero, si arriva all'equazione da porre nel sistema:

$$\begin{cases} x_2 - \frac{3}{4}x_2^3 - c = 0 & (1) \\ 2x_2 - 3x_2^3 = c & (2) \\ 2x_1 - 3x_1^3 = c & (3) \end{cases}$$

Ricavando  $c$  dalla (1) e sostituendo nella (2) si ottiene un'equazione nella sola incognita  $x_2$ , che dopo un raccoglimento diventa un'equazione di secondo grado con due soluzioni  $\pm \frac{2}{3}$ . A noi interessa solo quella positiva poiché le intersezioni cercate si trovano nel 1° quadrante.

Trovato  $x_2 = \frac{2}{3}$  lo si sostituisce nella (1) o nella (2) e si trova  $c = \frac{4}{9}$ ; posto quest'ultimo valore nella (3) si ha un'equazione di terzo grado nell'incognita  $x_1$ , che possiamo abbassare di grado dividendo per il binomio  $\left(x - \frac{2}{3}\right)$  poiché sappiamo già che  $x_2 = \frac{2}{3}$  è soluzione di tale equazione.

Si ottiene così l'equazione:  $3x_1^2 + 2x_1 - \frac{2}{3} = 0$  che ha due soluzioni:  $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{3}$  di cui ci interessa solo quella positiva:  $x_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}$ .

4) Per determinare la funzione  $g(x)$ , simmetrica della  $f(x)$  rispetto alla retta  $y = \frac{4}{9}$ , poiché sappiamo che la funzione simmetrica rispetto all'asse delle ascisse si ottiene cambiando il segno alla funzione, occorre

- riferire la  $f(x)$  ad un sistema con asse delle ascisse  $y = \frac{4}{9}$ , ovvero:  $f(x) - \frac{4}{9}$
- considerare la funzione opposta:  $-\left(f(x) - \frac{4}{9}\right)$
- ritornare a riferire il tutto al sistema di riferimento originale, sommando  $\frac{4}{9}$ , ovvero:

$$g(x) = -\left(f(x) - \frac{4}{9}\right) + \frac{4}{9} = 3x^3 - 2x + \frac{8}{9}$$

## PROBLEMA 2

1) Poiché  $ABC$  è un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza con l'ipotenusa come diametro; pertanto la mediana relativa all'ipotenusa sarà un raggio della semicirconferenza e come tale metà del diametro, ovvero dell'ipotenusa.

2) Indicati, per brevità con  $i$  l'ipotenusa  $BC$ , con  $h$  l'altezza relativa all'ipotenusa si può scrivere la seguente uguaglianza:

il prodotto dei cateti è uguale al prodotto dell'ipotenusa per l'altezza ad essa relativa; inoltre vale il teorema di Pitagora; ponendo a sistema le due uguaglianze si ottiene il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = b \cdot i & (1) \\ AB^2 + AC^2 = i^2 & (2) \end{cases}$$

La (2) può essere riscritta come  $(AB + AC)^2 - 2AB \cdot AC = i^2$  in cui si può sostituire ad  $AB \cdot AC$  il valore fornito dalla (1), portare tale termine al secondo membro, estrarre la radice quadrata di entrambi i membri e considerare la sola radice positiva, in quanto la somma di segmenti è positiva; il sistema pertanto diventa:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = bi & (1) \\ AB + AC = \sqrt{i^2 + 2bi} & (2) \end{cases}$$

Come per tutti i sistemi simmetrici le soluzioni sono rappresentate dalle radici dell'equazione:  $t^2 - st + p = 0$ , con  $s$  somma delle incognite e  $p$  prodotto; in questo caso diventa:

$t^2 - t\sqrt{i^2 + 2bi} + bi = 0$ ; indicato con  $AC$  il cateto maggiore le soluzioni saranno:

$$AC = \frac{\sqrt{i^2 + 2bi} + \sqrt{i^2 - 2bi}}{2} \quad \text{e} \quad AB = \frac{\sqrt{i^2 + 2bi} - \sqrt{i^2 - 2bi}}{2}$$

3) Se si indica con  $x$  uno dei due cateti, ad esempio  $AB$  l'altro sarà  $AC = \sqrt{3 - x^2}$ ; poiché il volume del cono dipende dal quadrato del raggio della base sarà conveniente usare  $AC$  come raggio e  $AB$  come altezza del cono; il volume di  $K$  pertanto sarà:

$$V_K = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot AB}{3} = \frac{\pi \cdot (3 - x^2) \cdot x}{3} = \frac{\pi}{3} (3x - x^3) \text{ m}^3$$

Per cercare il cono di volume massimo occorre uguagliare a zero la derivata prima del volume rispetto alla variabile  $x$ ; si ottengono così due valori:  $x = -1$  e  $x = 1$ , dove, essendo  $x$  la misura di un segmento, solo la soluzione positiva ha significato geometrico.

Se  $AB = 1$  allora  $AC = \sqrt{2}$  e  $V_K = \frac{2}{3} \pi \text{ m}^3$ ; ma un litro corrisponde ad un  $\text{dm}^3$  e pertanto:

$$V_K = \frac{2 \cdot 10^3}{3} \pi \text{ litri}$$

4) La misura di un angolo in radianti è pari al rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio; lo sviluppo piano della superficie laterale del cono  $K$  origina un settore circolare compreso tra un arco, la cui misura è pari alla misura della circonferenza della base di  $K$  ( $2\sqrt{2}\pi$ ), e due raggi che misurano quanto l'apotema del cono  $K$ , ovvero  $\sqrt{3}$ . Pertanto l'angolo  $\alpha$  sarà:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6\pi} \approx 5,1 \text{ radianti o, in gradi sessagesimali, } \alpha_g = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot 180^\circ \approx 293^\circ 56' 19''$$

## QUESTIONARIO

1 Indicato con  $m$  sia la somma dei due numeri cercati sia il loro prodotto, tali numeri saranno le radici dell'equazione:

$$x^2 - mx + m = 0 \quad \text{ovvero: } a = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4m}}{2} \quad \text{e} \quad b = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4m}}{2}$$

con la condizione, dovendo essere  $a$  e  $b$  numeri reali diversi tra loro, che il discriminante sia positivo, ovvero:  $m < 0$  v  $m > 4$ .

2 La superficie totale di un cilindro equilatero, avente cioè l'altezza uguale al diametro  $2r$  della base, è:  $6\pi r^2$  mentre il volume della sfera circoscritta al cilindro, ovvero una sfera di raggio  $r\sqrt{2}$ , ha una superficie pari a  $8\pi r^2$ ; il rapporto tra le due superficie è, quindi,  $\frac{3}{4}$ .

3 La funzione più semplice è da ricercare all'interno delle funzioni polinomiali; una funzione con un minimo relativo per  $x = -1$  e un massimo relativo per  $x = 1$  è crescente per valori interni a tale intervallo e, pertanto, la derivata prima contiene il fattore  $(1 - x^2)$ ; la presenza di un fattore costante non altera il risultato e pertanto la derivata prima può essere:

$$f'(x) = a(1 - x^2) \quad \text{che integrata fornisce: } f(x) = ax - \frac{a}{3}x^3 + c$$

Imponendo il passaggio della funzione per i punti forniti dal quesito si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} 3 = +\frac{2}{3}a + c \\ 2 = -\frac{2}{3}a + c \end{cases} \quad \text{che ha soluzione: } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \quad \text{da cui: } f(x) = -\frac{x^3}{4} + \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$$

4 Le soluzioni dell'equazione:  $e^x + 3x = 0$  sono rappresentate dalle intersezioni della funzione  $f(x) = e^x + 3x$  con l'asse delle ascisse; tale funzione ha derivata prima:  $f'(x) = e^x + 3$ , positiva per qualunque  $x$  reale, e pertanto  $f(x)$  risulta essere monotona crescente e, come tale, assume una e una sola volta tutti i valori del suo codominio; essendo il codominio  $]-\infty, +\infty[$  la  $f(x)$  assumerà una e una sola volta il valore  $y = 0$ , intersecando quindi una e una sola volta l'asse delle ascisse.

5 Le funzioni che soddisfano le condizioni indicate dal quesito sono infinite ma tutte devono presentare un punto di discontinuità di terza specie in  $x = 2$ ; un esempio di  $g(x)$  è il seguente:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{per } x \neq 2 \\ 4 & \text{per } x = 2 \end{cases}$$

**6** In base alle proprietà dei logaritmi si può trasformare  $g(x)$  come segue:

$$g(x) = \log(2x)^3 = 3 \log(2x) = 3 \log 2 + 3 \log x = 3 \log 2 + f(x)$$

Pertanto  $g(x)$  e  $f(x)$  differiscono solamente per la costante  $3 \log 2$  e avranno quindi la stessa derivata:

$$g'(x) = f'(x) = \frac{3}{x}.$$

**7** L'area di un triangolo qualunque è uguale alla metà del prodotto di due lati per il seno dell'angolo tra essi compreso, ovvero  $A = \frac{1}{2} ab \sin \delta$ ; tale area sarà massima quando  $\sin \delta = 1$  e cioè quando

$$\delta = \frac{\pi}{2}.$$

**8** Il grado sessagesimale è la  $360^{\text{a}}$  parte dell'angolo giro; il radiante è l'angolo al centro del cerchio goniometrico che insiste su un arco di lunghezza unitaria; il grado centesimale è la  $400^{\text{a}}$  parte dell'angolo giro.

**9** Questo integrale può essere calcolato con la formula di integrazione per parti prendendo come fattore finito  $\arcsen x$  e come fattore differenziale  $1 \cdot dx$ , si ottiene così:

$$[x \cdot \arcsen x + \sqrt{1-x^2}]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

**10** Dovendo associare a ciascuno dei quattro elementi di A uno dei tre elementi di B si ottengono  $3^4$  diverse applicazioni, ovvero tutte le possibili disposizioni con ripetizione di 3 elementi presi a gruppi di 4.

Per esercitarti ancora sugli argomenti affrontati nel	Svolgi
Problema 1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esercizio 29 pag. V 241</li> <li>• Esercizio 31 pag. V 241</li> <li>• Esercizio 33 pag. V 241</li> <li>• Esercizio 35 pag. V 241</li> <li>• Esercizio 41 pag. V 241</li> <li>• Esercizio 252 pag. W 121</li> <li>• Esercizio 261 pag. W 122</li> <li>• Esercizio 153 pag. U 32</li> <li>• Esercizio 154 pag. U 32</li> </ul>
Problema 2	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Problema 266 pag. V 278</li> <li>• Problema 270 pag. V 278</li> <li>• Problema 276 pag. V 278</li> <li>• Problema 277 pag. V 278</li> <li>• Problema 305 pag. V 210</li> <li>• Problema 309 pag. V 210</li> <li>• Problema 317 pag. V 211</li> <li>• Problema 319 pag. V 211</li> <li>• Problema 320 pag. V 211</li> <li>• Problema 321 pag. V 211</li> <li>• Problema 16 pag. V 217</li> </ul>
Quesito 3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esercizio 221 pag. V 194</li> <li>• Esercizio 222 pag. V 194</li> </ul>
Quesito 6	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Quesito 4 pag. V 282</li> </ul>
Quesito 9	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esercizio 109 pag. W 112</li> <li>• Esercizio 110 pag. W 112</li> <li>• Esercizio 119 pag. W 112</li> <li>• Esercizio 121 pag. W 112</li> <li>• Esercizio 132 pag. W 112</li> <li>• Esercizio 136 pag. W 112</li> </ul>
Quesito 10	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Esercizio 26 pag. <math>\alpha</math> 25</li> <li>• Esercizio 190 pag. <math>\alpha</math> 38</li> </ul>